TESIS - SM 142501

KARAKTERISASI PERILAKU NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN DARI MATRIKS PERSEGI ATAS ALJABAR *SUPERTROPICAL*

APRILIA DIVI YUSTITA
NRP 1214 201 005

Dosen Pembimbing:
Dr. Subiono, M.S.

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016

THESIS - SM 142501

CHARACTERIZATION OF EIGENVALUES AND EIGENVECTORS' BEHAVIOR OF SQUARE MATRICES OVER SUPERTROPICAL ALGEBRA

APRILIA DIVI YUSTITA
NRP 1214 201 005

Supervisor:
Dr. Subiono, M.S.

MASTER'S DEGREE
MATHEMATICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2016

KARAKTERISASI PERILAKU NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN DARI MATRIKS PERSEGI ATAS ALJABAR *SUPERTROPICAL*

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Magister Sains (M.Si.)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
APRILIA DIVI YUSTITA
NRP. 1214 201 005

Tanggal Ujian : 25 Januari 2016
Periode Wisuda : Maret 2016

Disetujui oleh :

Dr. Subiono, M.S. (Pembimbing)
NIP. 195704111984031 001

Dr. Hariyanto, M.Si. (Penguji)
NIP. 19530414 198203 1 002

Dr. Dieky Adzkiya, M.Si. (Penguji)
NIP. 19830517 200812 1 003

Dr. Chairul Imron, M.I.Komp. (Penguji)
NIP. 196111151987031 003

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI, DAN PENDIDIKAN TINGGI
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
PROGRAM PASCASARJANA

Direktur Program Pascasarjana

Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19601202 198701 1 001

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR NOTASI

R	: Sebarang semiring
$\mathcal{R}$	: Semiring *supertropical*
$\oplus$	: Operasi *max*
$\otimes$	: Operasi *plus*
$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan real
$\mathbb{R}^{\nu}$	: Himpunan bilangan *ghost*
ν	: Pemetaan *ghost*
$\mathcal{G}_0$	: Ideal *ghost*
a^{ν}	: Nilai a pada pemetaan *ghost*
0_{R}	: Elemen nol pada himpunan R
1_{R}	: Elemen satuan pada himpunan R
$M_n(R)$	: Matriks berukuran $n \times n$ dengan elemen matriks anggota R
$M_n(\mathcal{R})$	: Matriks berukuran $n \times n$ dengan elemen matriks anggota $\mathcal{R}$
$\mathcal{T}$	: *Extended tropical semiring*
$\prec$	: Urutan parsial pada himpunan *extended tropical semiring*
λ	: Nilai eigen dari matriks persegi
$\boldsymbol{v}$	: Vektor eigen dari matriks persegi
ε	: Elemen nol pada himpunan $\mathcal{R}$ (bernilai $-\infty$)
$\vDash_{gs}$	: Relasi *ghost surpasses*
$\geq_{\nu}$	: Relasi *dominates*
$\square$	: Akhir dari contoh
$\blacksquare$	: Akhir dari pembuktian

KATA PENGANTAR

Dengan Rahmat Allah SWT, syukur Alhamdulillah penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul:

Karakterisasi Perilaku Nilai Eigen dan Vektor Eigen dari Matriks Persegi atas Aljabar *Supertropical*

Tesis ini disusun sebagai salah satu syarat kelulusan Program Studi Strata 2 (S-2) Program Magister Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Terselesaikannya Tesis ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari banyak pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Ir. Joni Hermana, M.Sc.Es., Ph.D., selaku Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya yang telah memberikan kesempatan dan fasilitas yang mendukung kepada penulis untuk menyelesaikan Tesis ini.
2. Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc., Ph.D. selaku Direktur Program Pascasarjana Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
3. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc. selaku Dekan MIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
4. Dr. Imam Mukhlash, S.Si., M.T., selaku ketua Jurusan Matematika ITS.
5. Dr. Subiono, M.S. selaku Koordinator Program Studi Pascasarjana Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya dan dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, perhatian, arahan, nasehat, dan motivasi kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis ini.
6. Dr. Hariyanto, M.Si., selaku dosen wali sekaligus dosen penguji, atas bimbingan selama masa studi penulis, serta kritik, saran, dan bantuan dalam pengerjaan tesis.

7. Dr. Dieky Adzkiya, M.Si., dan Dr. Chairul Imron, M.I.Komp. selaku dosen penguji, atas kritik, saran, dan bantuan yang membantu penulis untuk memperbaiki Tesis ini.
8. Seluruh dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika ITS yang telah memberikan bekal ilmu pengetahuan kepada penulis dan juga atas segala bantuan, kemudahan, dan kelancaran selama penulis mengikuti proses perkuliahan.
9. Kedua orang tua, Bapak Supariyadi dan Ibu Wiwik Srimindarti, serta adik tercinta Novid Ari Rahmawan yang telah memberikan do’a dan dukungan yang tak pernah henti sampai terselesaikannya Tesis ini.
10. Galang Fajaryanto atas segala bentuk dukungan, do’a, nasihat, dan motivasi selama penulis menyelesaikan Tesis ini.
11. Vita, Mbak Ria, Mbak Uchi, Mbak Isni, Mbak Dian, Obik, Mbak Dhia, Vinda atas segala bentuk dukungan, saran, dan kritik yang diberikan kepada penulis selama mengerjakan tesis hingga terselesaikannya Tesis ini.
12. Teman-teman S2 Matematika ITS khususnya angkatan 2014 atas persahabatan dan kenangan selama penulis menempuh pendidikan di Pascasarjana Matematika ITS.
13. Seluruh pihak yang tak bisa penulis sebutkan satu per satu, atas segala bantuan baik langsung maupun tidak langsung.

Penulis menyadari bahwa tulisan ini jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari berbagai pihak, sehingga penelitian selanjutnya diharapkan bisa lebih baik dan semoga laporan Tesis ini dapat bermanfaat bagi semua pihak, bagi kemajuan dan perkembangan ilmu pengetahuan, dan dapat berkontribusi terhadap kemajuan ITS, bangsa, dan Negara.

KARAKTERISASI PERILAKU NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN DARI MATRIKS PERSEGI ATAS ALJABAR *SUPERTROPICAL*

Nama mahasiswa : Aprilia Divi Yustita
NRP : 1214 2010 05
Pembimbing : Dr. Subiono, M.S.

ABSTRAK

Aljabar *tropical* adalah suatu struktur aljabar yang berkaitan dengan dua operasi biner dan memenuhi aksioma semiring idempoten. Beberapa permasalahan dalam aljabar *tropical* tidak dapat diselesaikan dengan mudah. Oleh karena itu, diberikan suatu struktur aljabar terkait dengan aljabar *tropical* yang dapat mengatasi permasalahan tersebut, yaitu aljabar *supertropical*. Struktur aljabar *supertropical* dibentuk dari perluasan semiring *tropical.* Salah satu bagian yang penting untuk dibahas berkaitan dengan aljabar *supertropical* adalah masalah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks persegi atas semiring *supertropical* (atau *eigenproblem*). Pada penelitian ini dibahas mengenai perilaku nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian dari matriks persegi atas semiring *supertropical*. Selanjutnya dibandingkan antara perilaku nilai eigen dan vektor eigen dari matriks persegi pada aljabar *tropical* dengan aljabar *supertropical.* Hasil penelitian menunjukkan bahwa nilai eigen dari matriks persegi atas semiring *supertropical* tidak selalu tunggal, akan tetapi memiliki vektor eigen yang tidak tunggal. Nilai eigen dari matriks persegi atas semiring *tropical* dengan semiring *supertropical* menunjukkan perilaku yang sama, yaitu diperoleh suatu nilai eigen *supertropical* dan vektor eigen *supertropical* yang bersesuaian yang juga merupakan nilai eigen untuk matriks persegi atas aljabar *tropical*.

Kata kunci: aljabar *tropical*, aljabar *supertropical*, nilai eigen, vektor eigen.

CHARACTERIZATION OF EIGENVALUES AND EIGENVECTORS' BEHAVIOR OF SQUARE MATRICES OVER SUPERTROPICAL ALGEBRA

Name	: Aprilia Divi Yustita
NRP	: 1214 2010 05
Supervisor	: Dr. Subiono, M.S.

ABSTRACT

Tropical algebra is an algebraic structure that is related with two binary operations and satisfies idempotent semiring axioms. Several problems in tropical algebra cannot be solved easily. Therefore, we give an algebraic structure related with tropical algebra that can overcome the problems, i.e. supertropical algebra. Supertropical algebraic structure is formed from extended tropical semiring. One of the important parts to discuss related with supertropical algebra is eigenvalues problem and its corresponding eigenvectors of square matrix over supertropical semiring (or eigenproblem). In this research, we study about eigenvalues and corresponding eigenvectors behavior of square matrices over *supertropical* semiring. Then, we compare the behavior of eigenvalues and its corresponding eigenvectors of tropical algebra and supertropical algebra. The result shows that the eigenvalues of square matrix over supertropical semiring are not always unique, but it has no unique eigenvectors. The eigenvalues of square matrix over tropical semiring show that it has the same behavior with supertropical semiring, i.e. we obtained supertropical eigenvalues and its corresponding supertropical eigenvectors which is the eigenvalues of square matrix over tropical semiring.

Keywords: tropical algebra, supertropical algebra, eigenvalues, eigenvectors.

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Semiring merupakan salah satu pembahasan dalam aljabar yang berkaitan dengan dua operasi biner. Berdasarkan sudut pandang aljabar, semiring memberikan generalisasi dari teori ring [1]. Pada [1] juga disebutkan bahwa semiring muncul secara implisit dalam beberapa penelitian yang berkaitan dengan ideal dari ring. Suatu kasus khusus dari himpunan tak kosong yang merupakan semiring adalah ketika memenuhi aksioma pada aljabar max-plus, dimana aljabar max-plus adalah kasus khusus dari semiring idempoten [4]. Pada semiring dikenal istilah idempoten, selanjutnya semiring idempoten lebih dikenal dengan aljabar *tropical* [7]. Istilah '*tropical'* diartikan sebagai 'atas R_{max} (atau R_{min})' dan aljabar *tropical* adalah R_{max} dan R_{min} yang selanjutnya lebih dikenal dengan istilah 'max-plus','aljabar-max' dan 'min-plus' [7].

Penelitian mengenai aljabar max-plus terus mengalami perkembangan, dan dengan kelemahan yang melekat pada struktur aljabar tersebut memberikan kendala untuk penelitian lebih lanjut [4]. Kendala yang dimaksud diantaranya adalah kesulitan dalam mengembangkan teori matriks dan mempelajari polinomial atas aljabar max-plus [4]. Selanjutnya kendala yang ada diatasi dengan ditetapkan suatu struktur aljabar yang mencakup aljabar max-plus, yaitu aljabar *supertropical* [4]. Suatu semiring *tropical* dapat digeneralisasi (*extended tropical semiring*) menjadi struktur semiring yang memiliki bagian penjumlahan idempoten yang dibedakan, yaitu antara penjumlahan dengan elemen yang sama dan penjumlahan dengan elemen yang berbeda [2]. Struktur aljabar yang dimaksud adalah suatu triplet $(R, \mathcal{G}_0, v)$ yang disebut sebagai semiring *supertropical* dimana R adalah semiring dengan elemen satuan 1_R dan elemen nol 0_R (0_R sebagai elemen penyerap), $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G} \cup \{0_R\}$ adalah ideal dari semiring disebut dengan ideal *ghost*, dan $v: R \to \mathcal{G}_0$ adalah pemetaan *ghost* (homomorfisma semiring idempoten) [3].

Salah satu bagian yang penting untuk dibahas berkaitan dengan aljabar *supertropical* adalah masalah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks persegi atas semiring *supertropical* atau yang lebih dikenal dengan istilah *eigenproblem*. *Eigenproblem* pada aljabar linier menjadi dasar untuk mendapatkan beberapa sifat matriks, seperti apakah suatu matriks persegi dengan nilai eigen tertentu dapat didiagonalkan serta apakah vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen tertentu bebas linier atau bergantung linier. Penelitian yang telah dilakukan sebelumnya berkaitan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks persegi atas semiring *supertropical* dibahas pada [4], [5], dan [6] dengan hasil yang berbeda-beda. Pada [4] dibahas mengenai definisi nilai eigen dan vektor eigen *supertropical* serta generalisasi dari definisi tersebut, pada [5] dibahas mengenai penyelesaian suatu sistem persamaan, sedangkan pada [6] dibahas mengenai beberapa sifat nilai eigen dan vektor eigen *supertropical*. Selain itu pada [8] juga dikaji mengenai nilai eigen dan vektor eigen *supertropical*, akan tetapi penelitian ditekankan pada matriks *pseudo-inverse* dan nilai eigen dari matriks *pseudo-inverse* diberikan pada suatu konjektur. Berdasarkan uraian yang telah diberikan, pada penelitian ini dibahas tentang perilaku nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks persegi atas aljabar *supertropical*. Selain itu juga dibandingkan perilaku nilai eigen dan vektor eigen dari matriks persegi atas aljabar *tropical* dengan aljabar *supertropical*.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diberikan, maka permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana perilaku nilai eigen dan vektor eigen dari matriks persegi atas aljabar *supertropical*?
2. Bagaimana perbandingan perilaku nilai eigen dan vektor eigen dari matriks persegi atas aljabar *tropical* dengan aljabar *supertropical*?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang diberikan, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mendapatkan perilaku nilai eigen dan vektor eigen dari matriks persegi atas aljabar *supertropical.*
2. Mendapatkan perbandingan perilaku nilai eigen dan vektor eigen dari matriks persegi atas aljabar *tropical* dengan aljabar *supertropical*.

1.4 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian, maka manfaat yang ingin diperoleh adalah sebagai berikut.

1. Diperoleh perilaku nilai eigen dan vektor eigen dari matriks persegi atas aljabar *supertropical*.
2. Memberikan solusi yang lain untuk aljabar maxplus pada permasalahan nilai eigen dan vektor eigen.
3. Sebagai salah satu bahan referensi untuk penelitian selanjutnya khususnya berkaitan dengan aljabar *supertropical*.
4. Sebagai salah satu kontribusi untuk pengembangan ilmu pengetahuan Matematika khususnya dalam bidang analisis dan aljabar.

BAB 2
KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

Pada bagian ini dibahas uraian singkat mengenai beberapa teori yang digunakan untuk memudahkan dalam pembahasan tentang perilaku nilai eigen dan vektor eigen dari matriks persegi atas aljabar *tropical* dan aljabar *supertropical*. Uraian teori yang dimaksud berkaitan dengan aljabar *tropical*, matriks atas aljabar *tropical*, polinomial atas aljabar *tropical*, aljabar *supertropical*, matriks atas aljabar *supertropical*, dan polinomial atas aljabar *supertropical*. Terlebih dahulu diberikan uraian mengenai penelitian yang telah dilakukan sebelumnya sebagai berikut.

2.1 Penelitian yang Pernah Dilakukan

Beberapa penelitian mngenai nilai eigen dan vektor eigen pada aljabar *supertropical* sebelumnya telah dilakukan, diantaranya yang pertama dilakukan oleh Zur Izhakian dan Louis Rowen tahun 2011 pada jurnal *Supertropical Matrix Algebra*. Pada penelitiannya, Izhakian dan Rowen membahas mengenai definisi nilai eigen *supertropical* dan generalisasi dari definisi tersebut, yaitu *weak generalized supertropical eigenvalue*. Selain itu dibahas juga mengenai sifat bergantung *tropical* yang dikaitkan dengan determinan matriks atas semiring *supertropical* sebagai anggota ideal *ghost*.

Pada penelitian Zur Izhakian dan Louis Rowen yang kedua (2011) dalam jurnal *Supertropical Matrix Algebra II: Solving Tropical Equations*, dibahas mengenai cara penyelesaian suatu sistem persamaan, selain itu juga dibahas eksistensi adjoin *tangible* dari matriks atas semiring *supertropical* dan memberikan contoh sanggahan yang menunjukkan bahwa suatu vektor eigen bebas *tropical* ketika nilai eigennya berbeda.

Pada penelitian Zur Izhakian dan Louis Rowen yang ketiga (2011) dalam jurnal *Supertropical Matrix Algebra III: Powers of Matrices and Their Supertropical Eigenvalue*, dibahas mengenai beberapa sifat nilai eigen dan vektor eigen yang berkaitan dengan *g-annihilator* dan rank. Selain itu dibahas mengenai kebebasan dan kebergantungan *tropical* dari vektor eigen *supertropical* yang berkaitan dengan *tangible-core* matriks atas aljabar *supertropical*.

Pada penelitian Adi Niv (2015) dalam jurnal *On Pseudo-Inverses of Matrices and Their Characteristic Polynomials in Supertropical Algebra* dibahas mengenai matriks invers dari matriks persegi atas semiring *supertropical* atau matriks *pseudo-inverse,* selanjutnya diperoleh aturan tentang bagaimana membentuk polinomial karakteristik (atau maxpolinomial) dari matriks similar. Nilai eigen untuk matriks *pseudo-inverse* diberikan pada suatu konjektur yang dinyatakan sebagai invers dari nilai eigen matriks persegi atas aljabar *supertropical*.

Berdasarkan beberapa penelitian yang telah dilakukan tersebut, pada penelitian ini dibahas mengenai perilaku nilai eigen dan vektor eigen dari matriks persegi atas aljabar *supertropical*. Selanjutnya dibandingkan perilaku nilai eigen dan vektor eigen atas aljabar *tropical* dengan atas aljabar *supertropical*.

2.2 Aljabar *Tropical*

Aljabar *tropical* adalah semiring idempoten sekaligus semifield [7]. Struktur aljabar yang merupakan aljabar *tropical* adalah semiring *tropical.* Semiring *tropical* adalah suatu bilangan real disertai dengan $-\infty$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan *tropical* (bermakna maksimum) dan perkalian *tropical* (bermakna penjumlahan) [2]. Dengan demikian, aljabar max-plus yang merupakan semiring idempoten terhadap operasi $\oplus$ yang bermakna maksimum merupakan semiring *tropical*, demikian juga berlaku untuk dualnya yaitu aljabar min-plus. Berikut ini diberikan definisi secara formal mengenai semiring *tropical* akan tetapi terlebih dahulu diberikan definisi mengenai semiring.

Definisi 2.2.1 Semiring [10]

Suatu semiring $(S,+,\times)$, adalah himpunan takkosong S disertai dengan dua operasi biner $+$ dan $\times$, yang memenuhi aksioma berikut:

(i) $(S, +)$ adalah monoid komutatif dengan elemen nol $\mathbf{0}$, yaitu $\forall x, y, z \in S$ memenuhi

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$
$$x + \mathbf{0} = \mathbf{0} + x = x$$
$$x + y = y + x$$

(ii) $(S, \times)$ adalah monoid dengan elemen satuan $\mathbf{1}$, yaitu $\forall x, y, z \in S$ memenuhi

$$(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$$
$$x \times \mathbf{1} = \mathbf{1} \times x = x$$

(iii) sifat penyerapan elemen nol $\mathbf{0}$ terhadap operasi $\times$ yaitu $\forall x \in S$ memenuhi

$$x \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times x = \mathbf{0}$$

(iv) operasi $\times$ distributif terhadap operasi $+$, yaitu $\forall x, y, z \in S$ berlaku

$$(x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$$
$$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z).$$

Contoh 2.2.1

Diberikan himpunan bilangan real bersama dengan $-\infty$ yaitu $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Didefinisikan operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ yaitu untuk setiap $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ berlaku $a \oplus b = \max\{a, b\}$ dan $a \otimes b = a + b$. Dengan demikian $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ adalah semiring karena memenuhi beberapa aksioma berikut

(i) $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus)$ monoid komutatif dengan elemen nol $\mathbf{0} = -\infty$, yaitu jika diambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ maka memenuhi

$(a \oplus b) \oplus c = \max\{\max\{a, b\}, c\} = \max\{a, b, c\} = \max\{a, \max\{b, c\}\} = a \oplus (b \oplus c)$,

$a \oplus -\infty = \max\{a, -\infty\} = \max\{-\infty, a\} = -\infty \oplus a = a$,

$a \oplus b = \max\{a, b\} = \max\{b, a\} = b \oplus a$.

(ii) $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \otimes)$ monoid dengan elemen satuan $\mathbf{1} = 0$, yaitu jika diambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ maka memenuhi

$(a \otimes b) \otimes c = (a + b) + c = a + b + c = a + (b + c) = a \otimes (b \otimes c)$,

$a \otimes 0 = a + 0 = a$

(iii) sifat penyerapan elemen nol $\mathbf{0} = -\infty$ terhadap operasi $\otimes$, yaitu jika diambil sebarang $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ maka memenuhi

$a \otimes -\infty = a + (-\infty) = -\infty.$

(iv) sifat distributif operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$, yaitu jika diambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ maka memenuhi

$(a \oplus b) \otimes c = \max\{a, b\} + c = \max\{a + c, b + c\} = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c),$

$a \otimes (b \oplus c) = a + \max\{b, c\} = \max\{a + b, a + c\} = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c).$

Berdasarkan (i), (ii), (iii), dan (iv) maka $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ adalah semiring.

□

Definisi 2.2.2 Semiring *Tropical* [2]

Semiring *tropical* dinotasikan sebagai $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ dengan $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real, dimana $\oplus$ adalah penjumlahan *tropical* yang bermakna maksimum dan $\otimes$ adalah perkalian *tropical* yang bermakna penjumlahan, yaitu $\forall a, b \in \mathbb{R}$ maka $a \oplus b = \max\{a, b\}$ dan $a \otimes b = a + b.$

Struktur yang isomorfik dengan semiring *tropical* adalah aljabar min-plus yaitu $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus', \otimes)$ dimana $\oplus'$ bermakna minimum dan $\otimes$ bermakna penjumlahan yaitu $a \oplus' b = \min\{a, b\}$ dan $a \otimes b = a + b.$ Bilangan $-\infty$ dan ∞ berturut-turut adalah elemen nol pada operasi $\oplus$ (maksimum) dan $\oplus'$ (minimum) karena untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ berlaku $a \oplus -\infty = \max\{a, -\infty\} = a$ dan $a \oplus' \infty = \min\{a, \infty\} = a.$ Selain itu elemen $0 \in \mathbb{R}$ merupakan elemen satuan untuk operasi $\otimes$ karena untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ berlaku $0 \otimes a = 0 + a = a$ Selanjutnya untuk penulisan yang lebih ringkas semiring $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ dituliskan sebagai $\mathbb{R}_{max}$ sedangkan semiring $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus', \otimes)$ dituliskan sebagai $\mathbb{R}_{min}$.

2.2.1 Matriks atas Aljabar *Tropical*

Jika diberikan suatu semiring S, maka dapat dibentuk suatu matriks persegi atas semiring yaitu $A \in M_n(S)$ dengan $M_n(S)$ adalah himpunan matriks persegi $n \times n$ atas semiring S dan entri-entri pada matriks merupakan anggota S. Demikian juga jika semiring yang diberikan adalah semiring *tropical* ($\mathbb{R}_{max}$). Secara formal hal ini didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.3 Matriks Persegi [10]

Misalkan $\mathbb{R}_{max}$ adalah suatu semiring dengan elemen nol $\varepsilon = -\infty$ dan elemen satuan 0 dan himpunan matriks persegi berukuran $n \times n$ pada semiring $\mathbb{R}_{max}$ dinotasikan oleh $M_n(\mathbb{R}_{max})$. Matriks persegi berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{R}_{max}$ yang juga merupakan semiring adalah $A \in M_n(\mathbb{R}_{max})$ dengan elemen baris ke-i ke kolom-j pada matriks A dinotasikan oleh $a_{i,j}$ untuk $i,j \in \{1,2,3,\dots,n\}$ dan n anggota himpunan bilangan asli $\mathbb{Z}$. Matriks A dituliskan sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix},$$

dengan matriks identitas dari A diberikan oleh

$$I = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \varepsilon \\ \varepsilon & \cdots & \varepsilon & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks nolnya adalah

$$Z = \begin{bmatrix} \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \cdots & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.2.4 Penjumlahan dan Perkalian Matriks Persegi [10]

Misalkan $A, B \in M_n(\mathbb{R}_{max})$ dan skalar $\alpha \in \mathbb{R}_{max}$. Penjumlahan dan perkalian matriks A, B serta perkalian skalar dengan matriks A elemen baris ke-i kolom ke-j berturut-turut yaitu

$$[A \oplus B]_{i,j} = a_{i,j} \oplus b_{i,j} = \max\{a_{i,j}, b_{i,j}\}$$

$$[A \otimes B]_{i,j} = \bigoplus_{k=1}^{n} a_{i,k} \otimes b_{k,j} = \max_{k \in \{1,\dots n\}} \{a_{i,k} + b_{k,j}\}$$

dan

$$[\alpha \otimes A]_{i,j} = \alpha \otimes a_{i,j}.$$

Sebagaimana pada aritmatika biasa, operasi $\otimes$ memiliki prioritas urutan atas operasi $\oplus$.

Contoh 2.2.2

Diberikan suatu semiring *tropical* $\mathbb{R}_{max}$ dan matriks persegi atas $\mathbb{R}_{max}$ yaitu $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 6 & 4 & -\infty \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ -\infty & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Penjumlahan kedua matriks pada baris ke-i dan kolom ke-j diberikan oleh,

$[A \oplus B]_{1,1} = 1 \oplus 4 = \max\{1,4\} = 4,$

$[A \oplus B]_{1,2} = 0 \oplus 2 = \max\{0,2\} = 2,$

$[A \oplus B]_{1,3} = 3 \oplus 6 = \max\{3,6\} = 6,$

$[A \oplus B]_{2,1} = 6 \oplus 3 = \max\{6,3\} = 6,$

$[A \oplus B]_{2,2} = 4 \oplus 1 = \max\{4,1\} = 4,$

$[A \oplus B]_{2,3} = -\infty \oplus 5 = \max\{-\infty, 5\} = 5,$

$[A \oplus B]_{3,1} = 1 \oplus -\infty = \max\{1, -\infty\} = 1,$

$[A \oplus B]_{3,2} = 5 \oplus 1 = \max\{5,1\} = 5,$

$[A \oplus B]_{3,3} = 2 \oplus 0 = \max\{2,0\} = 2,$

dengan demikian penjumlahan kedua matriks adalah $A \oplus B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$. Perkalian kedua matriks pada baris ke-i dan kolom ke-j diberikan oleh,

$[A \oplus B]_{1,1} = 1 \otimes 4 \oplus 0 \otimes 3 \oplus 3 \otimes -\infty = \max\{1+4, 0+3, 3+(-\infty)\} = 5,$

$[A \oplus B]_{1,2} = 1 \otimes 2 \oplus 0 \otimes 1 \oplus 3 \otimes 1 = \max\{1+2, 0+1, 3+1\} = 4,$

$[A \oplus B]_{1,3} = 1 \otimes 6 \oplus 0 \otimes 5 \oplus 3 \otimes 0 = \max\{1+6, 0+5, 3+0\} = 7,$

$[A \oplus B]_{2,1} = 6 \otimes 4 \oplus 4 \otimes 3 \oplus -\infty \otimes -\infty = \max\{6+4, 4+3, -\infty+(-\infty)\} = 10,$

$[A \oplus B]_{2,2} = 6 \otimes 2 \oplus 4 \otimes 1 \oplus -\infty \otimes 1 = \max\{6+2, 4+1, -\infty+1\} = 8,$

$[A \oplus B]_{2,3} = 6 \otimes 6 \oplus 4 \otimes 5 \oplus -\infty \otimes 0 = \max\{6+6, 4+5, -\infty+0\} = 12,$

$[A \oplus B]_{3,1} = 1 \otimes 4 \oplus 5 \otimes 3 \oplus 2 \otimes -\infty = \max\{1+4, 5+3, 2+(-\infty)\} = 8,$

$[A \oplus B]_{3,2} = 1 \otimes 2 \oplus 5 \otimes 1 \oplus 2 \otimes 1 = \max\{1+2, 5+1, 2+1\} = 6,$

$[A \oplus B]_{3,3} = 1 \otimes 6 \oplus 5 \otimes 5 \oplus 2 \otimes 0 = \max\{1+6, 5+5, 2+0\} = 10,$

dengan demikian perkalian kedua matriks adalah $A \otimes B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 10 & 8 & 12 \\ 8 & 6 & 10 \end{bmatrix}$.

$\square$

Penjumlahan matriks $\oplus$ pada $M_n(\mathbb{R}_{max})$ dalam **Definisi 2.2.4** berlaku sifat asosiatif, memiliki elemen nol Z dan komutatif, selain itu perkalian matriks $\otimes$ seperti dalam **Definisi 2.2.4** berlaku sifat asosiatif, memiliki elemen satuan I, distributif terhadap $\oplus$, serta elemen penyerap Z untuk operasi $\otimes$. Dengan demikian $(M_n(\mathbb{R}_{max}), \oplus, \otimes)$ adalah semiring idempoten akan tetapi bukan semiring komutatif. Berikut ditunjukkan $A \otimes B \neq B \otimes A$ dengan matriks A dan B seperti pada **Contoh 2.2.2** yaitu untuk perkalian kedua matriks pada baris ke-i dan kolom ke-j

$[B \oplus A]_{1,1} = 4 \otimes 1 \oplus 2 \otimes 6 \oplus 6 \otimes 1 = \max\{4+1, 2+6, 6+1\} = 8,$

$[B \oplus A]_{1,2} = 4 \otimes 0 \oplus 2 \otimes 4 \oplus 6 \otimes 5 = \max\{4+0, 2+4, 6+5\} = 11,$

$[B \oplus A]_{1,3} = 4 \otimes 3 \oplus 2 \otimes -\infty \oplus 6 \otimes 2 = \max\{4+3, 2+(-\infty), 6+2\} = 8,$

$[B \oplus A]_{2,1} = 3 \otimes 1 \oplus 1 \otimes 6 \oplus 5 \otimes 1 = \max\{3+1, 1+6, 5+1\} = 7,$

$[B \oplus A]_{2,2} = 3 \otimes 0 \oplus 1 \otimes 4 \oplus 5 \otimes 5 = \max\{3+0, 1+4, 5+5\} = 10,$

$[B \oplus A]_{2,3} = 3 \otimes 3 \oplus 1 \otimes -\infty \oplus 5 \otimes 2 = \max\{3+3, 1+(-\infty), 5+2\} = 7,$

$[B \oplus A]_{3,1} = -\infty \otimes 1 \oplus 1 \otimes 6 \oplus 0 \otimes 1 = \max\{-\infty+1, 1+6, 0+1\} = 7,$

$[B \oplus A]_{3,2} = -\infty \otimes 0 \oplus 1 \otimes 4 \oplus 0 \otimes 5 = \max\{-\infty+0, 1+4, 0+5\} = 5,$

$[B \oplus A]_{3,3} = -\infty \otimes 6 \oplus 3 \otimes -\infty \oplus 0 \otimes 2 = \max\{-\infty+6, 3+(-\infty), 0+2\} = 2,$

dengan demikian perkalian kedua matriks adalah $B \otimes A = \begin{bmatrix} 8 & 11 & 8 \\ 7 & 10 & 7 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 10 & 8 & 12 \\ 8 & 6 & 10 \end{bmatrix} = A \otimes B.$

Definisi 2.2.5 Pangkat dari Matriks [10]

Misalkan matriks $A \in M_n(\mathbb{R}_{max})$ dan skalar $\alpha \in \mathbb{R}_{max}$. Pangkat ke-$k$ dari matriks A dinotasikan $A^{\otimes k}$ didefinisikan oleh

$$A^{\otimes k} = \underbrace{A \otimes A \otimes A \otimes \ldots \otimes A}_{k}$$

dengan $k \in \mathbb{N}, k \neq 0$ dan $A^{\otimes 0} = I$. Pangkat ke-k dari matriks hasil perkalian skalar α dengan matriks A yaitu $(\alpha \otimes A)^{\otimes k}$ elemen baris ke-i dan kolom ke-j adalah

$$[(\alpha \otimes A)^{\otimes k}]_{i,j} = \alpha^{\otimes k} \otimes [A^{\otimes k}]_{i,j}.$$

Definisi 2.2.6 Trace Matriks [10]

Misalkan $\mathbb{R}_{max}$ adalah semiring *tropical*, untuk setiap $A \in M_n(\mathbb{R}_{max})$ trace dari matriks A dinotasikan oleh trace(A) didefinisikan sebagai

$$trace(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} {}_{i,i} .a$$

Contoh 2.2.3

Pada **Contoh 2.2.2** matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 6 & 4 & -\infty \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ dengan demikian matriks pangkat dari A sebagai berikut

$$A^{\otimes 2} = A \otimes A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 6 & 4 & -\infty \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 6 & 4 & -\infty \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 10 & 8 & 9 \\ 11 & 9 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A^{\otimes 3} = A \otimes A^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 6 & 4 & -\infty \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 10 & 8 & 9 \\ 11 & 9 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 12 & 9 \\ 14 & 14 & 13 \\ 15 & 13 & 14 \end{bmatrix},$$

dan

$$\text{trace}(A) = \bigoplus_{i=1}^{3} {}_{i,i}\, a = \max\{1,4,2\} = 4,$$

$$\text{trace}(A^{\otimes 2}) = \bigoplus_{i=1}^{3} [A^{\otimes 2}]_{i,i} = \max\{6,8,4\} = 8,$$

$$\text{trace}(A^{\otimes 3}) = \bigoplus_{i=1}^{3} [A^{\otimes 3}]_{i,i} = \max\{14,14,14\} = 14.$$

□

Definisi 2.2.7 Determinan *Tropical* [9]

Misalkan $\mathbb{R}_{max}$ adalah semiring *tropical* dan matriks $A \in M_n(\mathbb{R}_{max})$. Determinan *tropical* dari matriks A didefinisikan sebagai jumlahan dari hasil semua $n!$ permutasi σ dari $\{1,2,\dots,n\}$, yaitu

$$|A| = \bigoplus_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} \otimes a_{2,\sigma(2)} \otimes \dots \otimes a_{n,\sigma(n)},$$

$$= \max_{\sigma \in S_n} (a_{1,\sigma(1)} + a_{2,\sigma(2)} + \cdots + a_{n,\sigma(n)}),$$

dengan S_n adalah himpunan dari semua permutasi pada $\{1,2,\dots,n\}$.

Contoh 2.2.4

Pada **Contoh 2.2.2** matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 6 & 4 & -\infty \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, dengan ukuran matriks adalah 3×3, maka $n = 3$ dan permutasi dari himpunan $\{1,2,3\}$ sebanyak $3! = 6$ yaitu

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (\ ), \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2,3), \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2),$

$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,3), \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,2), \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,3).$

Berdasarkan permutasi-permutasi yang ada, maka diperoleh

$a_{1,\sigma(1)} \otimes a_{2,\sigma(2)} \otimes a_{3,\sigma(3)} = a_{1,1} \otimes a_{2,2} \otimes a_{3,3} = 1 \otimes 4 \otimes 2 = 1 + 4 + 2 = 7,$

$a_{1,\sigma(1)} \otimes a_{2,\sigma(2)} \otimes a_{3,\sigma(3)} = a_{1,1} \otimes a_{2,3} \otimes a_{3,2} = 1 \otimes -\infty \otimes 5 = 1 + (-\infty) + 5 = -\infty,$

$a_{1,\sigma(1)} \otimes a_{2,\sigma(2)} \otimes a_{3,\sigma(3)} = a_{1,2} \otimes a_{2,1} \otimes a_{3,3} = 0 \otimes 6 \otimes 2 = 0 + 6 + 2 = 8,$

$a_{1,\sigma(1)} \otimes a_{2,\sigma(2)} \otimes a_{3,\sigma(3)} = a_{1,2} \otimes a_{2,3} \otimes a_{3,1} = 0 \otimes -\infty \otimes 1 = 0 + (-\infty) + 1 = -\infty,$

$a_{1,\sigma(1)} \otimes a_{2,\sigma(2)} \otimes a_{3,\sigma(3)} = a_{1,3} \otimes a_{2,1} \otimes a_{3,2} = 3 \otimes 6 \otimes 5 = 3 + 6 + 5 = 14,$

$a_{1,\sigma(1)} \otimes a_{2,\sigma(2)} \otimes a_{3,\sigma(3)} = a_{1,3} \otimes a_{2,2} \otimes a_{3,1} = 3 \otimes 4 \otimes 1 = 3 + 4 + 1 = 8.$

Dengan demikian determinan matriks A yaitu

$$|A| = \max\{7, -\infty, 8, -\infty, 14, 8\} = 14.$$

□

2.2.2 Polinomial atas Aljabar *Tropical* [9]

Polinomial atas aljabar *tropical* merupakan suatu kombinasi linier berhingga dari monomial *tropical* [9]. Jika diberikan suatu semiring *tropical* $\mathbb{R}_{max}$ dan misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah variabel yang merepresentasikan elemen-elemen dalam $\mathbb{R}_{max}$ maka monomial *tropical* adalah sembarang hasil operasi dari variabel tersebut dan diperbolehkan terjadi pengulangan. Hasil operasi dari monomial dapat dituliskan secara sederhana seperti pada monomial pada umumnya, berikut diberikan monomial atas semiring *tropical* $\mathbb{R}_{max}$ sebagai contoh,

$$x_2 \otimes x_4 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_3 \otimes x_2 \otimes x_3 \otimes x_2. \qquad (2.1)$$

Selanjutnya untuk menyederhanakan penulisan, bentuk $x_n \otimes x_{n-1}$ dituliskan sebagai $x_n x_{n-1}$ dan bentuk $x^{\otimes n} = \underbrace{x \otimes x \otimes \ldots \otimes x}_{n}$ dituliskan sebagai x^n sehingga polinomial pada (2.1) menjadi

$$x_2 \otimes x_4 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_3 \otimes x_2 \otimes x_3 \otimes x_2 = x_1^2 x_2^3 x_3^2 x_4. \qquad (2.2)$$

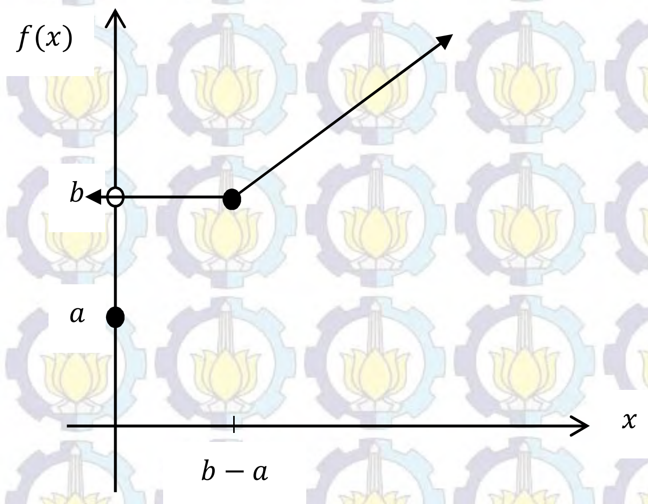
Bentuk monomial merepresentasikan fungsi dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}$. Bentuk persamaan (2.2) secara aritmatik sama artinya dengan

$$x_2 + x_4 + x_1 + x_1 + x_3 + x_2 + x_3 + x_2 = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4.$$

Jika diberikan suatu semiring *tropical* $\mathbb{R}_{max}$ maka $f(x) = a \otimes x \oplus b$ merupakan polinomial *tropical* dengan $a, b \in \mathbb{R}_{max}$. Bentuk tersebut dapat ditulis sebagai $f(x) = \max\{a + x, b\}$ atau dapat juga dituliskan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} a + x & ,\text{jika } x \geq b - a \\ b & ,\text{yang lain} \end{cases}.$$

Jika diasumsikan $0 \leq a < b$ maka representasi grafik dari $f(x)$ adalah



Gambar 2.1 Representasi grafik dari fungsi $f(x) = a \otimes x \oplus b$.

Berikut diberikan definisi secara formal mengenai polinomial *tropical*.

Definisi 2.2.8 Polinomial *Tropical* [9]

Diberikan suatu semiring *tropical* $\mathbb{R}_{max}$. Polinomial *tropical* adalah kombinasi linier dari monomial *tropical*

$$f(x_1, \dots, x_n) = a \otimes x_1^{\otimes i_1} x_2^{\otimes i_2} \dots x_n^{\otimes i_n} \oplus b \otimes x_1^{\otimes j_1} x_2^{\otimes j_2} \dots x_n^{\otimes j_n} \oplus \dots,$$

dengan setiap koefisien $a, b, \dots \in \mathbb{R}_{max}$ dan pangkat $i_1, i_2, \dots j_1, j_2 \dots \in \mathbb{Z}$. Misalkan $i_1 = k$ dengan $k \in \mathbb{Z}$, bentuk berpangkat dari $x_1{}^{\otimes i_1} = x_1{}^{\otimes k}$ diberikan oleh

$$x_1{}^{\otimes k} = \underbrace{x_1 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_1}_{k}.$$

Definisi yang serupa juga diberikan untuk semiring *tropical* $\mathbb{R}_{min}$, dengan notasi $\oplus$ menjadi $\oplus'$ dan memiliki makna minimum. Selanjutnya agar lebih ringkas dalam penulisan, bentuk $x^{\otimes k}$ dituliskan sebagai x^k dan $a \otimes x^{\otimes k}$ dituliskan sebagai ax^k.

Contoh 2.2.5

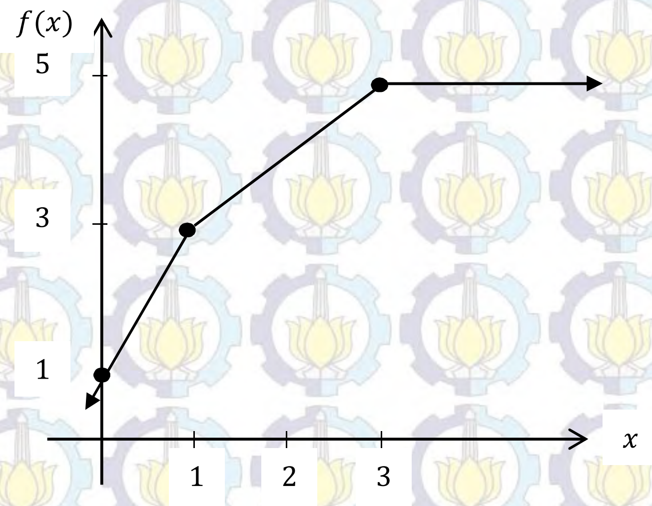
Diberikan semiring $\mathbb{R}_{min}$, fungsi dengan bentuk $f(x) = 1x^2 \oplus' 2x \oplus' 5$ adalah polinomial atas semiring $\mathbb{R}_{min}$. Fungsi $f(x)$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$f(x) = \min\{1 + 2x, 2 + x, 5\},$$

atau

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 2x & , \text{jika } x \leq 1 \\ 2 + x & , \text{jika } 1 < x \leq 3 \\ 5 & , \text{yang lain.} \end{cases}$$

Representasi grafik dari $f(x)$ sebagai berikut



Gambar 2.2 Representasi grafik dari fungsi $f(x) = 1x^2 \oplus' 2x \oplus' 5$.

2.2.3 *Extended Tropical Semiring*

Berdasarkan [2] dapat dibentuk suatu perluasan dari semiring *tropical* yang disebut sebagai *extended tropical semiring*, dimana operasi penjumlahan yang melengkapi didefinisikan berbeda antara penjumlahan dengan dua elemen yang sama dan penjumlahan dengan dua elemen yang berbeda. Perluasan dari semiring *tropical* dilakukan dengan menambahkan suatu elemen, disebut dengan bilangan *ghost*, untuk setiap bilangan real. Misalkan a dan b adalah dua buah bilangan real dimana $a < b$, maka terdapat suatu bilangan *ghost* a^v yang memiliki nilai selalu "lebih besar" dari a akan tetapi tidak melebihi nilai b, dan a^v memiliki nilai yang "cukup dekat" dengan a. Demikian berlaku untuk setiap bilangan real $a \in \mathbb{R}$, sehingga untuk bilangan real $a + \delta$ dengan δ bernilai positif dan mendekati nol maka berlaku a "lebih kecil" dari a^v "lebih kecil" dari $a + \delta$ dan "lebih kecil" dari $(a + \delta)^v$. Selanjutnya himpunan semua bilangan *ghost* a^v untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ dinotasikan dengan $\mathbb{R}^v$, dengan $\mathbb{R}^v =$

$\{a^v | a \in \mathbb{R}\}$ dan gabungan dari semua himpunan $\mathbb{R}, \mathbb{R}^v$, dan $\{-\infty\}$ dinotasikan sebagai $T = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^v \cup \{-\infty\}$. Elemen pada himpunan $\mathbb{R}$ disebut sebagai elemen *tangible* sedangkan elemen pada himpunan $\mathbb{R}^v$ disebut sebagai elemen *ghost*.

Berikut ini diberikan definisi mengenai urutan $\prec$ untuk himpunan T serta aksioma yang berlaku pada himpunan T [2].

Definisi 2.2.9 Urutan $\prec$ pada Himpunan T [2]

Misalkan $T = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^v \cup \{-\infty\}$, dan elemen-elemen pada himpunan $\mathbb{R}, \mathbb{R}^v$, dan T berturut-turut dinotasikan sebagai $a, b \in \mathbb{R}$, $a^v, b^v \in \mathbb{R}^v$ untuk $a, b \in \mathbb{R}$, dan $x, y \in T$. Urutan $\prec$ untuk himpunan T, yaitu:

1. $-\infty \prec x, \forall x \in T \backslash \{-\infty\}$,
2. $a \prec a^v$ untuk semua bilangan real $a \in \mathbb{R}$,
3. untuk sebarang bilangan real $a < b$ maka $a \prec b, a \prec b^v, a^v \prec b$, dan $a^v \prec b^v$.

Relasi $\preccurlyeq$ hanya terjadi ketika kedua elemen merupakan anggota $\mathbb{R}$ atau kedua elemen merupakan anggota $\mathbb{R}^v$.

Contoh 2.2.7

Diberikan himpunan $T = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^v \cup \{-\infty\}$, jika diambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{R}$ dimana $a < b < c$ maka memenuhi relasi berikut

$$-\infty \prec a \prec a^v \prec b \prec b^v \prec c \prec c^v.$$

Dengan demikian nilai $-\infty$ selalu lebih kecil dari bilangan yang lain, dan nilai a^v merupakan batas atas terkecil yang mendekati nilai a.

□

Aksioma 2.2.1

Misalkan $T = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^v \cup \{-\infty\}$ adalah *extended tropical semiring*, maka aritmatika operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada himpunan T sebagai berikut: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall a^v, b^v \in \mathbb{R}^v$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $\forall x, y \in T$ berlaku

1) $-\infty \oplus x = x \oplus -\infty = x$,
2) $x \oplus y = \max\{x, y\}$ kecuali $x = y$, untuk $x, y \neq -\infty$

3) $a \oplus a = a^v \oplus a^v = a \oplus a^v = a^v \oplus a = a^v$,

4) $-\infty \otimes x = x \otimes -\infty = -\infty$,

5) $a \otimes b = a + b \forall a, b \in \mathbb{R}$,

6) $a^v \otimes b = a \otimes b^v = a^v \otimes b^v = (a+b)^v$.

Notasi $\max_{\prec}$ pada poin kedua menotasikan nilai maksimum dengan memerhatikan relasi $\prec$.

Selanjutnya himpunan $T = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^v \cup \{-\infty\}$ disertai operasi $\oplus$ dan $\otimes$ disebut *extended tropical semiring*. Pada himpunan T didefinisikan suatu pemetaan $v: T \rightarrow \mathbb{R}^v_{-\infty}$ yang didefinisikan $v(a) = a^v$ untuk $a \in \mathbb{R}$, dimana $\mathbb{R}^v_{-\infty} = \mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R}^v \cup \{-\infty\}$. Pemetaan v merupakan pemetaan identitas jika elemen yang dipetakan adalah anggota $\mathbb{R}^v_{-\infty}$.

Berkaitan dengan *extended tropical semiring*, selanjutnya dapat dibentuk suatu struktur aljabar yang memenuhi pemetaan v, dengan v adalah homomorfisma semiring yang idempoten. Struktur aljabar yang dimaksud disebut sebagai semiring *supertropical*, dan dibahas lebih lanjut pada subbab berikutnya. Selanjutnya untuk menyederhanakan penulisan, *extended tropical semiring* $(T, \oplus, \otimes)$ dituliskan sebagai $\mathcal{T}$.

2.3 Aljabar *Supertropical*

Struktur aljabar *supertropical* dibentuk dari *extended tropical semiring*. Struktur utama yang dibahas dalam aljabar *supertropical* adalah semiring dengan *ghost*. Semiring dengan *ghost* didefinisikan sebagai triplet $(R, \mathcal{G}_0, v)$ [4]. Berikut diberikan definisi secara formal, akan tetapi terlebih dahulu dibahas mengenai semifield, semiring bipoten, himpunan terurut, dan valuasi.

Definisi 2.3.1 Semifield [11]

Misalkan $(R, +, \times)$ adalah semiring. Semiring $(R, +, \times)$ adalah semifield jika setiap elemen himpunan R kecuali $\mathbf{0}$ memiliki invers terhadap operasi $\times$, atau $(R \backslash \{\mathbf{0}\}, \times)$ adalah grup.

Definisi 2.3.2 Semiring Bipoten [11]

Suatu semiring $(R, +, \times)$ adalah semiring bipoten jika untuk setiap $a, b \in R$ hasil penjumlahan $a + b$ adalah a atau b.

Definisi 2.3.3 Terurut Total $\leq$ [11]

Misalkan $(R, +, \times)$ adalah semiring. Himpunan R terurut total $\leq$ jika untuk setiap $a, b \in R$ memenuhi

$$a \leq b \Leftrightarrow a + b = b.$$

Urutan berlaku pada perkalian dan penjumlahan yaitu

$$a \leq b \Rightarrow a \times c \leq b \times c,$$

dan

$$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c,$$

untuk setiap $a, b, c \in R$.

Contoh 2.3.1

Diberikan semiring *tropical* $\mathbb{R}_{max}$. Semiring $\mathbb{R}_{max}$ adalah semifield karena untuk setiap bilangan real $a \in \mathbb{R}$ terdapat $-a \in \mathbb{R}$ sehingga $a + (-a) = 0$. Dengan demikian semiring $\mathbb{R}_{max}$ adalah semifield karena setiap elemen himpunan bilangan real kecuali $-\infty$ memiliki invers terhadap operasi $\otimes$ yang bermakna penjumlahan. Selain itu dapat dilihat pada $\mathbb{R}_{max}$ bahwa untuk setiap $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ hasil operasi penjumahan *tropical* dari keduanya yaitu $a \oplus b = \max\{a, b\}$ adalah salah satu dari a (ketika $a > b$) atau b (ketika $a < b$). Dengan demikian $\mathbb{R}_{max}$ adalah semiring bipoten.

□

Contoh 2.3.2

Diberikan semiring *tropical* $\mathbb{R}_{max}$. Himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ terurut total $\leq$ karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ memenuhi

($\Rightarrow$) jika $a \leq b$ maka $a \oplus b = \max\{a, b\} = b$, dan

($\Leftarrow$) jika $a \oplus b = \max\{a, b\} = b$ maka $a \leq b$.

Sehingga $a \leq b$ jika dan hanya jika $a \oplus b = \max\{a, b\} = b$. Selain itu himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ terurut pada operasi penjumlahan *tropical* dan perkalian *tropical* yaitu untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ berlaku:

i. jika $a \leq b$ maka $a \otimes c \leq b \otimes c$ yaitu $a + c \leq b + c$,

ii. jika $a \leq b$ maka $a \oplus c \leq b \oplus c$ yaitu

andaikan $c > a, b$ maka $\max\{a, c\} = \max\{b, c\} = c$,

andaikan $c < a, b$ maka $\max\{a, c\} = a < b = \max\{b, c\}$,

andaikan $a < c < b$ maka $\max\{a, c\} = c < b = \max\{b, c\}$,

andaikan $c = a$ atau $c = b$ maka berturut-turut $\max\{a, c\} = a < b = \max\{b, c\}$ atau $\max\{a, c\} = c = b = \max\{b, c\}$.

$\square$

Definisi 2.3.4 Valuasi [11]

Misalkan $(R, +, \times)$ adalah semiring. Valuasi v pada himpunan R adalah pemetaan injektif (satu-satu) $v: R \to M$ dimana M adalah semifield bipoten dengan $v(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $v(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, dan untuk setiap $a, b \in M$ berlaku

$$v(a \times b) = v(a) \times v(b),$$

dan

$$v(a + b) \leq v(a) + v(b).$$

Valuasi v pada semiring R dikatakan *strict* jika untuk setiap $a, b \in R$ berlaku

$$v(a + b) = v(a) + v(b),$$

atau dengan kata lain homomorfisma semiring. Selain itu valuasi v pada semiring R dikatakan *strong* jika untuk setiap $a, b \in R$ berlaku

$$v(a) \neq v(b) \Rightarrow v(a + b) = v(a) + v(b).$$

Contoh 2.3.3

Diberikan semiring *tropical* $\mathbb{R}_{max}$, dengan $\mathbb{R}_{max}$ juga merupakan semifield bipoten. Didefinisikan suatu pemetaan

$$v: \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\},$$
$$a \mapsto v \qquad (a),$$

dengan

$$v(a) = a^{\otimes 2} = a \otimes a.$$

Pemetaan v adalah pemetaan injektif karena jika diambil sebarang $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dengan $a \neq b$ diperoleh $v(a) = a^{\otimes 2} = a \otimes a = a + a = 2a$ dan $v(b) = b^{\otimes 2} = b \otimes b = b + b = 2b$ sehingga berlaku $\forall a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dengan $a \neq b$ maka $v(a) \neq v(b)$. Elemen nol dan elemen satuan pada $\mathbb{R}_{max}$ berturut-turut adalah $\mathbf{0} = -\infty$ dan $\mathbf{1} = 0$, sehingga berlaku,

$$v(\mathbf{0}) = v(-\infty) = (-\infty)^{\otimes 2} = -\infty \otimes -\infty = -\infty + (-\infty) = -\infty,$$

dan

$$v(\mathbf{1}) = v(0) = 0^{\otimes 2} = 0 \otimes 0 = 0 + 0 = 0.$$

Pemetaan v memenuhi untuk setiap $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ berlaku

$$v(a \otimes b) = (a \otimes b)^{\otimes 2}$$

$$= (a \otimes b) \otimes (a \otimes b)$$

$$= a \otimes a \otimes b \otimes b$$

$$= a^{\otimes 2} \otimes b^{\otimes 2} = v(a) \otimes v(b).$$

dan

$$v(a \oplus b) = (a \oplus b)^{\otimes 2}$$

$$= (a \oplus b) \otimes (a \oplus b)$$

$$= a \otimes a \oplus a \otimes b \oplus b \otimes a \oplus b \otimes b$$

$$= \max\{a + a, a + b, b + a, b + b\}$$

karena $\max\{a + b\} = \max\{b + a\}$, diperoleh

$$= \max\{a + a, a + b, b + b\}$$

$$= a \otimes a \oplus a \otimes b \oplus b \otimes b$$

$$= a^{\otimes 2} \oplus a \otimes b \oplus b^{\otimes 2}$$

jika $a < b$ maka $a^{\otimes 2} < a \otimes b < b^{\otimes 2}$ dan jika $a > b$ maka $a^{\otimes 2} > a \otimes b > b^{\otimes 2}$, sehingga diperoleh

$$= a^{\otimes 2} \oplus b^{\otimes 2} = v(a) \oplus v(b).$$

Dengan demikian pemetaan v adalah homomorfisma semiring.

□

Suatu homomorfisma semiring $v: R \to R$ dikatakan idempoten jika memenuhi $v^2(x) = v(v(x)) = v(x)$ untuk setiap $x \in R$.

Selanjutnya dibahas mengenai semiring dengan *ghost* yang dinotasikan dengan triplet $(R, \mathcal{G}_0, v)$. Notasi R menunjukkan suatu semiring dengan elemen nol (0_R) dan elemen satuan (1_R), $\mathcal{G}_0$ adalah suatu ideal dari semiring R yang mana $\mathcal{G}_0$ submonoid dari R sedemikian sehingga $\forall a \in \mathcal{G}_0, \forall r \in R$ berlaku $ar \in \mathcal{G}_0$ dan $ra \in \mathcal{G}_0$, sedangkan pemetaan v adalah suatu homomorfisma semiring idempoten. Pemetaan v merupakan pemetaan identitas yaitu $v(a) = a, \forall a \in \mathcal{G}_0$ dan pemetaan idempoten $v^2(a) = v\big(v(a)\big) = v(a), \forall a \in R$. Operasi penjumlahan dan perkalian pada semiring dengan *ghost* dilakukan dengan memerhatikan **Aksioma 2.2.1**. Berikut diberikan definisi secara formal dari semiring dengan *ghost*.

Definisi 2.3.5 Semiring dengan *Ghost* [3]

Misalkan R adalah semiring dengan elemen nol dan elemen satuan (berturut-turut dinotasikan 0_R dan 1_R). Semiring dengan *ghost* adalah triplet $(R, \mathcal{G}_0, v)$ dimana $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G} \cup \{0_R\}$ adalah ideal *ghost* dan $v: R \to \mathcal{G}_0$ adalah homomorfisma semiring yang idempoten (disebut sebagai pemetaan *ghost*), yang didefinisikan dengan

$$a + a = v(a), \forall a \in R.$$

Contoh 2.3.4

Diberikan *extended tropical semiring* $\mathcal{T} = (T, \oplus, \otimes)$ dimana $T = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^v \cup \{-\infty\}$ dengan elemen nol $0_R = -\infty$ dan elemen satuan $1_R = 0$. Ideal *ghost* dari semiring $\mathcal{T}$ adalah $\mathcal{G}_0 = \mathbb{R}^v \cup \{-\infty\}$ karena $\forall a^v \in \mathcal{G}_0$ dan $\forall r \in \mathcal{T}$ memenuhi

$$a^v \otimes r = (a + r)^v = (r + a)^v = r \otimes a^v \in \mathcal{G}_0.$$

Didefinisikan suatu pemetaan injektif yaitu

$$v: \mathcal{T} \to \mathcal{G}_0,$$
$$x \mapsto v(x) = x^v.$$

Pemetaan v adalah homomorfisma semiring yaitu $\forall x, y \in \mathcal{T}$ berlaku

$$v(x \oplus y) = (x \oplus y)^v$$
$$= (\max{}_{<}\{x, y\})^v$$
jika $x < y$ maka $(\max{}_{<}\{x, y\})^v = y^v$ dan jika $x > y$ maka $(\max{}_{<}\{x, y\})^v = x^v$ sehingga diperoleh
$$= x^v \oplus y^v$$
$$= v(x) \oplus v(y)$$
dan
$$v(x \otimes y) = (x \otimes y)^v$$
$$= (x + y)^v$$
berdasarkan **Aksioma 2.2.1** diketahui $x^v \otimes y^v = (x + y)^v$ sehingga diperoleh
$$= v(x) \otimes v(y).$$
Selain itu pemetaan v memenuhi $\forall x, y \in \mathcal{T}$ berlaku
$$v^2(x) = v\big(v(x)\big) = v(x^v) = x^v = v(x),$$
sehingga v merupakan homomorfisma semiring yang idempoten. Selanjutnya $\forall x \in \mathcal{T}$ memenuhi $x \oplus x = x^v = v(x)$. Dengan demikian triplet $(\mathcal{T}, \mathcal{G}_0, v)$ adalah semiring dengan *ghost*.

$\square$

Definisi 2.3.6 Semiring *Supertropical* [3]

Misalkan triplet $(R, \mathcal{G}_0, v)$ adalah semiring dengan *ghost*. Semiring *supertropical* adalah semiring dengan *ghost* yang memenuhi

1) Jika $a \neq b$ maka $a + b \in \{a, b\}, \forall a, b \in R$ (bipoten),
2) Jika $a = b$ maka $a + b = a^v$ (*supertropicality*).

Notasi a^v bermakna nilai fungsi v pada a atau $v(a)$.

Contoh 2.3.5

Diberikan semiring dengan *ghost* yaitu $(\mathcal{T}, \mathcal{G}_0, v)$ dimana $\mathcal{T} = (T, \oplus, \otimes)$ dan $T = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^v \cup \{-\infty\}$ (berdasarkan **Contoh 2.3.4**). Selanjutnya semiring $(\mathcal{T}, \mathcal{G}_0, v)$ memenuhi

1) $\forall a, b \in \mathcal{T}$ dengan $a \neq b$ maka $a \oplus b = \max_{\prec}\{a, b\}$, jika $a < b$ maka $a \oplus b = b$ dan jika $a > b$ maka $a \oplus b = a$. Dengan demikian diperoleh bahwa hasil dari $a \oplus b$ adalah salah satu dari a atau b yaitu $a \oplus b \in \{a, b\}$ (sifat bipoten).
2) $\forall a, b \in \mathcal{T}$ dengan $a = b$ maka $a \oplus b = a \oplus a = a^{\nu}$ (sifat *supertropicality*).

Berdasarkan 1) dan 2) maka *triplet* $(\mathcal{T}, \mathcal{G}_0, v)$ adalah semiring *supertropical*.

□

Definisi 2.3.7 $\boldsymbol{v}$-Ekivalen [6]

Misalkan $(R, \mathcal{G}_0, v)$ adalah semiring dengan *ghost*. Dua bilangan $a, b \in R$ dikatakan v-ekivalen dan dinotasikan dengan $a \cong_v b$ jika $a^v = b^v$.

Definisi 2.3.8 *Dominates* dan *Strictly Dominates* [6]

Misalkan $(R, \mathcal{G}_0, v)$ adalah semiring dengan *ghost*. Dua bilangan $a, b \in R$ dikatakan a *dominates* b dan dinotasikan dengan $a \geq_v b$ jika memenuhi $a^v \geq b^v$, sedangkan jika berlaku $a^v > b^v$ maka dikatakan a *strictly dominates* b.

Definisi 2.3.9 *Ghost Surpasses* [6]

Misalkan $(R, \mathcal{G}_0, v)$ adalah semiring dengan *ghost*. Relasi $\vDash_{gs}$ disebut dengan *ghost surpasses* pada sebarang semiring dengan *ghost* $(R, \mathcal{G}_0, v)$, yaitu b dikatakan *ghost surpasses* a dinotasikan dengan $b \vDash_{gs} a$, jika memenuhi

$$b \vDash_{gs} a \Leftrightarrow b = a + ghos\,t.$$

Relasi *ghost surpasses* $b \vDash_{gs} a$ mengakibatkan $a + b \in \mathcal{G}_0$. Pada semiring *supertropical*, relasi *ghost surpasses* $b \vDash_{gs} a$ terjadi jika dan hanya jika $b = a$ atau $b \geq_v a$.

2.3.1 Matriks atas Aljabar *Supertropical*

Pada sembarang semiring S dapat dibentuk suatu matriks persegi dengan ukuran $n \times n$ dimana entri-entri pada matriks adalah elemen semiring S. Matriks persegi berukuran $n \times n$ merupakan semiring jika dilengkapi dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian matriks pada semiring S [4]. Dengan demikian, misalkan diberikan $\mathcal{R} = (R, \mathcal{G}_0, v)$ suatu semiring dengan *ghost*, maka dapat dibentuk suatu matriks persegi A berukuran $n \times n$ yang merupakan anggota dari himpunan semua matriks pada $\mathcal{R}$, dimana entri pada matriks A adalah anggota dari semiring $\mathcal{R}$. Berikut diberikan definisi secara formal dari matriks atas semiring dengan *ghost*.

Definisi 2.3.10 Matriks Persegi atas Semiring dengan *Ghost* [6]
Misalkan $\mathcal{R} = (R, \mathcal{G}_0, v)$ adalah semiring dengan *ghost* dan $M_n(\mathcal{R})$ adalah himpunan semua matriks persegi berukuran $n \times n$ pada semiring $\mathcal{R}$. Matriks persegi berukuran $n \times n$ atas semiring dengan *ghost* $\mathcal{R}$ adalah $A \in M_n(\mathcal{R})$ dengan entri pada matriks A adalah nggota $\mathcal{R}$.

$M_n(\mathcal{R})$ juga merupakan semiring dengan *ghost* dimana ideal *ghost* dari $M_n(\mathcal{R})$ adalah $M_n(\mathcal{G}_0)$ dan diperoleh pemetaan *ghost* $v_*: M_n(\mathcal{R}) \to M_n(\mathcal{G}_0)$ dengan mengaplikasikan pada setiap entri matriks serta dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian matriks seperti pada semiring $\mathcal{R}$ [6]. Matriks identitas dari semiring $M_n(\mathcal{R})$ adalah matriks berukuran $n \times n$ dengan elemen pada diagonal utama adalah 1_R dan selainnya adalah 0_R yang dinotasikan dengan I. Sedangkan matriks nol dari semiring $M_n(\mathcal{R})$ diberikan oleh matriks berukuran $n \times n$ dengan semua elemennya adalah 0_R.

Definisi 2.3.11 Penjumlahan dan Perkalian Matriks atas Semiring dengan *Ghost* [6]
Misalkan $\mathcal{R} = (R, \mathcal{G}_0, v)$ adalah semiring dengan *ghost*, $A, B \in M_n(\mathcal{R})$ dan skalar $a \in \mathcal{R}$. Penjumlahan dan perkalian matriks A, B serta perkalian skalar dengan matriks A elemen baris ke-i dan kolom ke-j berturut-turut yaitu

$$[A + B]_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j},$$

$$[A \times B]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \times a_{k,j},$$

dan

$$[a \times A]_{i,j} = a \times a_{i,j}.$$

Contoh 2.3.8

Diberikan semiring *supertropical* $(T, \mathcal{G}_0, \nu)$ dengan $T = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^{\nu} \cup \{-\infty\}$ dan $\mathcal{G}_0 = \mathbb{R}^{\nu} \cup \{-\infty\}$. Misalkan matriks persegi atas semiring $(T, \mathcal{G}_0, \nu)$ yaitu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3^{\nu} & -\infty \\ 2 & 2^{\nu} & 1^{\nu} \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -\infty & 2^{\nu} \\ 4^{\nu} & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 1^{\nu} \end{bmatrix}.$$

Penjumlahan kedua matriks pada baris ke-i dan kolom ke-j diberikan oleh

$[A \oplus B]_{1,1} = 0 \oplus 1 = \max_{\prec}\{0,1\} = 1,$

$[A \oplus B]_{1,2} = 3^{\nu} \oplus -\infty = 3^{\nu},$

$[A \oplus B]_{1,3} = -\infty \oplus 2^{\nu} = 2^{\nu},$

$[A \oplus B]_{2,1} = 2 \oplus 4^{\nu} = \max_{\prec}\{2, 4^{\nu}\} = 4^{\nu},$

$[A \oplus B]_{2,2} = 2^{\nu} \oplus 3 = \max_{\prec}\{2^{\nu}, 3\} = 3,$

$[A \oplus B]_{2,3} = 1^{\nu} \oplus 0 = \max_{\prec}\{1^{\nu}, 0\} = 1^{\nu},$

$[A \oplus B]_{3,1} = 5 \oplus 5 = 5^{\nu},$

$[A \oplus B]_{3,2} = 4 \oplus 2 = \max_{\prec}\{4, 2\} = 4,$

$[A \oplus B]_{3,3} = 3 \oplus 1^{\nu} = \max_{\prec}\{3, 1^{\nu}\} = 3,$

dengan demikian penjumlahan kedua matriks adalah $A \oplus B = \begin{bmatrix} 1 & 3^{\nu} & 2^{\nu} \\ 4^{\nu} & 3 & 1^{\nu} \\ 5^{\nu} & 4 & 3 \end{bmatrix}.$

Perkalian kedua matriks pada baris ke-i dan kolom ke-j diberikan oleh

$[A \otimes B]_{1,1} = 0 \otimes 1 \oplus 3^{\nu} \otimes 4^{\nu} \oplus -\infty \otimes 5 = \max_{\prec}\{0 + 1, (3 + 4)^{\nu}, -\infty + 5\} = \max_{\prec}\{1, 7^{\nu}, -\infty\} = 7^{\nu},$

$[A \otimes B]_{1,2} = 0 \otimes -\infty \oplus 3^{\nu} \otimes 3 \oplus -\infty \otimes 2 = \max_{\prec}\{0 + (-\infty), (3 + 3)^{\nu}, -\infty + 2\} = \max_{\prec}\{-\infty, 6^{\nu}, -\infty\} = 6^{\nu},$

$[A \otimes B]_{1,3} = 0 \otimes 2^{\nu} \oplus 3^{\nu} \otimes 0 \oplus -\infty \otimes 1^{\nu} = \max_{\prec}\{(0 + 2)^{\nu}, (3 + 0)^{\nu}, (-\infty + 1)^{\nu} = \max_{\prec}\{2^{\nu}, 3^{\nu}, -\infty\} = 3^{\nu},$

$[A \otimes B]_{2,1} = 2 \otimes 1 \oplus 2^{\nu} \otimes 4^{\nu} \oplus 1^{\nu} \otimes 5 = \max_{\prec}\{2 + 1, (2 + 4)^{\nu}, (1 + 5)^{\nu}\} = \max_{\prec}\{3, 6^{\nu}, 6^{\nu}\} = 6^{\nu},$

$[A \otimes B]_{2,2} = 2 \otimes -\infty \oplus 2^{\nu} \otimes 3 \oplus 1^{\nu} \otimes 2 = \max_{\prec}\{2 + (-\infty), (2 + 3)^{\nu}, (1 + 2)^{\nu}\} = \max_{\prec}\{-\infty, 5^{\nu}, 3^{\nu}\} = 5^{\nu},$

$[A \otimes B]_{2,3} = 2 \otimes 2^v \oplus 2^v \otimes 0 \oplus 1^v \otimes 1^v = \max_{\prec}\{(2+2)^v, (2+0)^v, (1+1)^v\} = \max_{\prec}\{4^v, 2^v, 2^v\} = 4^v$,

$[A \otimes B]_{3,1} = 5 \otimes 1 \oplus 4 \otimes 4^v \oplus 3 \otimes 5 = \max_{\prec}\{5+1, (4+4)^v, 3+5\} = \max_{\prec}\{6, 8^v, 8\} = 8^v$,

$[A \otimes B]_{3,2} = 5 \otimes -\infty \oplus 4 \otimes 3 \oplus 3 \otimes 2 = \max_{\prec}\{5+(-\infty), 4+3, 3+2\} = \max_{\prec}\{-\infty, 7, 5\} = 7$,

$[A \otimes B]_{3,3} = 5 \otimes 2^v \oplus 4 \otimes 0 \oplus 3 \otimes 1^v = \max_{\prec}\{(5+2)^v, 4+0, (3+1)^v\} = \max_{\prec}\{7^v, 4, 4^v\} = 7^v$,

dengan demikian perkalian kedua matriks adalah $A \otimes B = \begin{bmatrix} 7^v & 6^v & 3^v \\ 6^v & 5^v & 4^v \\ 8^v & 7 & 7^v \end{bmatrix}$.

□

Definisi 2.3.12 Determinan *Supertropical* [6]

Misalkan R adalah semiring *supertropical* dan $A \in M_n(R)$ adalah matriks atas semiring *supertropical*. Determinan *supertropical* dari matriks A dinotasikan dengan $|A|$ didefinisikan sebagai jumlahan dari hasil kali semua $n!$ permutasi σ dari $\{1,2,\dots,n\}$, yaitu

$$\sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} \times a_{2,\sigma(2)} \times \dots \times a_{n,\sigma(n)},$$

dengan S_n adalah himpunan dari semua permutasi pada $\{1,2,\dots,n\}$.

Contoh 2.3.9

Pada **Contoh 2.3.8** matriks atas semiring *supertropical* $(T, \mathcal{G}_0, v)$ dengan $T = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^v \cup \{-\infty\}$, yaitu $A = \begin{bmatrix} 0 & 3^v & -\infty \\ 2 & 2^v & 1^v \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, dengan ukuran matriks adalah 3×3, maka $n = 3$ dan permutasi dari himpunan $\{1,2,3\}$ sebanyak $3! = 6$ yaitu

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (\quad), \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2,3), \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2)$,

$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,3), \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,2), \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,3)$.

Berdasarkan permutasi-permutasi yang ada, maka diperoleh

$a_{1,\sigma(1)} \otimes a_{2,\sigma(2)} \otimes a_{3,\sigma(3)} = a_{1,1} \otimes a_{2,2} \otimes a_{3,3} = 0 \otimes 2^{\nu} \otimes 3 = (0 + 2 + 3)^{\nu} = 5^{\nu}$,

$a_{1,\sigma(1)} \otimes a_{2,\sigma(2)} \otimes a_{3,\sigma(3)} = a_{1,1} \otimes a_{2,3} \otimes a_{3,2} = 0 \otimes 1^{\nu} \otimes 4 = (0 + 1 + 4)^{\nu} = 5^{\nu}$,

$a_{1,\sigma(1)} \otimes a_{2,\sigma(2)} \otimes a_{3,\sigma(3)} = a_{1,2} \otimes a_{2,1} \otimes a_{3,3} = 3^{\nu} \otimes 2 \otimes 3 = (3 + 2 + 3)^{\nu} = 8^{\nu}$,

$a_{1,\sigma(1)} \otimes a_{2,\sigma(2)} \otimes a_{3,\sigma(3)} = a_{1,2} \otimes a_{2,3} \otimes a_{3,1} = 3^{\nu} \otimes 1^{\nu} \otimes 5 = (3 + 1 + 5)^{\nu} = 9^{\nu}$,

$a_{1,\sigma(1)} \otimes a_{2,\sigma(2)} \otimes a_{3,\sigma(3)} = a_{1,3} \otimes a_{2,1} \otimes a_{3,2} = -\infty \otimes 2 \otimes 4 = -\infty + 2 + 4 = -\infty$,

$a_{1,\sigma(1)} \otimes a_{2,\sigma(2)} \otimes a_{3,\sigma(3)} = a_{1,3} \otimes a_{2,2} \otimes a_{3,1} = -\infty \otimes 2^{\nu} \otimes 5 = (-\infty + 2 + 5)^{\nu} = -\infty$.

Dengan demikian determinan matriks A yaitu

$$|A| = \max_{\prec}\{5^{\nu}, 5^{\nu}, 8^{\nu}, 9^{\nu}, -\infty, -\infty\} = 9^{\nu}.$$

$\square$

2.3.2 Polinomial atas Aljabar *Supertropical*

Seperti halnya pada aljabar *tropical*, pendefinisian polinomial *supertropical* hampir sama. Jika diberikan suatu semiring *supertropical* R maka polinomial didefinisikan sebagai jumlahan dari beberapa monomial atas semiring R. Berikut diberikan definisi secara formal dari polinomial *supertropical*.

Definisi 2.3.13 Polinomial *Supertropical* [6]

Misalkan $\mathcal{R}$ adalah suatu semiring *supertropical*. Polinomial *supertropical* dinotasikan dengan f adalah jumlahan dari beberapa monomial $a_i x^i$ dengan $a_i \in R$ yaitu

$$f = \sum_i a_i x^i.$$

Definisi 2.3.14 Akar Polinomial [6]

Misalkan $\mathcal{R}$ adalah suatu semiring *supertropical* dan

$$f = \sum_i a_i x^i$$

adalah polinomial *supertropical*. Elemen $a \in \mathcal{R}$ adalah akar dari polinomial $f \in \mathcal{R}[x]$, bila nilai $f(a) \in \mathcal{G}_0$. Jika elemen $a \in \mathcal{R}\backslash\mathcal{G}_0$ maka a disebut sebagai akar *tangible*.

Definisi 2.3.15 Polinomial Karakteristik [6]

Misalkan R adalah suatu semiring *supertropical* dan $A \in M_n(R)$ adalah matriks atas semiring *supertropical*. Polinomial karakteristik dari matriks A didefinisikan oleh

$$f_A(x) = |xI + A| = x^n + \sum_{k=1}^{n} a_k\, x^{n-k}.$$

Contoh 2.3.10

Diberikan semiring *supertropical* $(T, \mathcal{G}_0, v)$ dengan $T = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^v \cup \{-\infty\}$ dan $\mathcal{G}_0 = \mathbb{R}^v \cup \{-\infty\}$. Misalkan $A \in M_n(R)$ adalah matriks persegi atas semiring $(T, \mathcal{G}_0, v)$ yaitu

$$A = \begin{bmatrix} -\infty & 14 & 8 \\ 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & 1 & -\infty \end{bmatrix},$$

matriks A memenuhi polinomial karakteristik

$$f_A(x) = |x \otimes I \oplus A|$$

$$= \left| x \otimes \begin{bmatrix} 0 & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -\infty & 14 & 8 \\ 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & 1 & -\infty \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} x \otimes 0 & x \otimes -\infty & x \otimes -\infty \\ x \otimes -\infty & x \otimes 0 & x \otimes -\infty \\ x \otimes -\infty & x \otimes -\infty & x \otimes 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -\infty & 14 & 8 \\ 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & 1 & -\infty \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} x + 0 & x + (-\infty) & x + (-\infty) \\ x + (-\infty) & x + 0 & x + (-\infty) \\ x + (-\infty) & x + (-\infty) & x + 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -\infty & 14 & 8 \\ 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & 1 & -\infty \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} x & -\infty & -\infty \\ -\infty & x & -\infty \\ -\infty & -\infty & x \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -\infty & 14 & 8 \\ 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & 1 & -\infty \end{bmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} x \oplus -\infty & -\infty \oplus 14 & -\infty \oplus 8 \\ -\infty \oplus 0 & x \oplus -\infty & -\infty \oplus -\infty \\ -\infty \oplus 0 & -\infty \oplus 1 & x \oplus -\infty \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \max\{x, -\infty\} & \max\{-\infty, 14\} & \max\{-\infty, 8\} \\ \max\{-\infty, 0\} & \max\{x, -\infty\} & \max\{-\infty, -\infty\} \\ \max\{-\infty, 0\} & \max\{-\infty, 1\} & \max\{x, -\infty\} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & 14 & 8 \\ 0 & x & -\infty \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$= x^{\otimes 3} \oplus (x \otimes -\infty \otimes 1) \oplus (14 \otimes 0 \otimes x) \oplus (14 \otimes -\infty \otimes 0) \oplus (8 \otimes 0 \otimes 1) \oplus (8 \otimes x \otimes 0)$$

$$= \max\{3x, (x + (-\infty) + 1), (14 + 0 + x), (14 + (-\infty) + 0), (8 + 0 + 1), (8 + x + 0)\}$$

$$= \max\{3x, 14 + x, 9\}$$

Berdasarkan **Definisi 2.3.14** elemen x adalah akar dari polinomial $f_A(x)$, bila nilai $f(x) \in \mathcal{G}_0$. Agar diperoleh nilai $f(x) \in \mathcal{G}_0$ maka diperlukan paling sedikit dua buah elemen yang sama untuk dimaksimumkan. Dengan demikian terdapat tiga kemungkinan nilai yaitu $x = -5$, $x = 3$, $x = 7$ yang diperoleh dari $14 + x = 9$, $3x = 9$, dan $3x = 14 + x$. Jika ketiga nilai tersebut disubstitusikan pada persamaan $\max\{3x, 14 + x, 9\}$ maka untuk $x = -5$ diperoleh

$$\max\{3x, 14 + x, 9\} = \max\{3(-5), 14 + (-5), 9\} = \max\{-15, 9, 9\} = 9^{\nu} \in \mathcal{G}_0,$$

untuk $x = 3$ diperoleh

$$\max\{3x, 14 + x, 9\} = \max\{3(3), 14 + 3, 9\} = \max\{9, 17, 9\} = 17 \notin \mathcal{G}_0,$$

sedangkan untuk $x = 7$ diperoleh

$$\max\{3x, 14 + x, 9\} = \max\{3(7), 14 + 7, 9\} = \max\{21, 21, 9\} = 21^{\nu} \in \mathcal{G}_0.$$

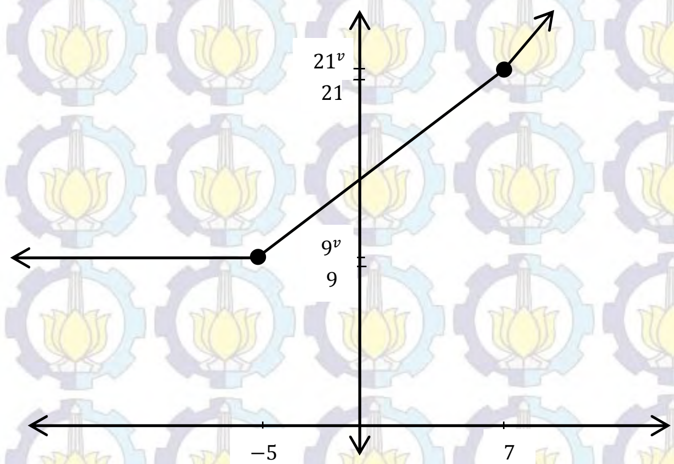
Oleh karena itu diperoleh nilai akar-akar polinomial karakteristik dari matriks A adalah $x = -5$ dan $x = 7$.

□

Secara grafik akar polinomial $f_A(x)$ berada pada titik patahan pada grafik $f_A(x)$. Pada **Contoh 2.3.10** fungsi $f_A(x)$ dapat dituliskan sebagai

$$f_A(x) = \begin{cases} 3x & , \text{jika } x \geq 7 \\ 14 + x & , \text{jika } -5 \leq x \leq 7 \\ 9 & , \text{jika } x \leq -5 \end{cases}$$

dan grafik dari fungsi $f_A(x)$ ditunjukkan sebagai berikut



Gambar 2.3 Grafik fungsi polinomial $f_A(x) = x^{\otimes 3} \oplus (14 \otimes x) \oplus 9$

Berdasarkan Gambar 2.3 akar dari polinomial $f_A(x)$ yaitu $x = -5$ dan $x = 7$ berada pada titik terjadinya patahan pada grafik fungsi $f_A(x)$.

BAB 3
METODE PENELITIAN

Pada bab ini dibahas tentang metode penelitian yang telah dilakukan sebagai berikut:

1. Studi literatur.

   Mengkaji teori mengenai aljabar *supertropical*, matriks atas aljabar *tropical*, matriks atas semiring *supertropical*, sistem persamaan pada aljabar *supertropical*, nilai eigen dan vektor eigen atas aljabar *tropical* dan *supertropical*. Pengkajian dilakukan dengan mengumpulkan beberapa informasi pada beberapa jurnal yang terkait.
2. Mendapatkan nilai eigen dan vektor eigen matriks persegi atas semiring *supertropical*.

   Pada tahap ini dimulai dengan membentuk suatu matriks persegi atas semiring *supertropical*, kemudian membentuk polinomial karakteristik dari matriks tersebut dan memfaktorkannya sehingga didapatkan nilai eigen, dan menyelesaikan suatu sistem persamaan untuk mendapatkan vektor eigen.
3. Menyelidiki perilaku nilai eigen dan vektor eigen dari matriks persegi atas semiring *supertropical*.

   Pada tahapan ini, nilai eigen dan vektor eigen sudah diperoleh diamati perilaku ketunggalannya dan bentuk vektor eigen yang dihasilkan.
4. Membandingkan perilaku nilai eigen dan vektor eigen dari matriks persegi atas aljabar *tropical* dengan aljabar *supertropical*.

   Pada tahapan ini, dibandingkan perilaku nilai eigen dan vektor eigen dari matriks persegi atas aljabar *tropical* dengan aljabar *supertropical*.

BAB 4
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas beberapa hasil penelitian mengenai nilai eigen dan vektor eigen pada aljabar *supertropical*. Pembahasan pada bagian 4.1 mengenai pengertian nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks persegi atas aljabar *supertropical* serta perilakunya, pada bagian 4.2 dibahas perbandingan perilaku nilai eigen dan vektor eigen atas aljabar *tropical* dengan aljabar *supertropical*. Bahasan utama yang ditekankan adalah pada aljabar maxplus (dinotasikan sebagai $\mathbb{R}_{max}$) yang merupakan semiring *tropical*, dan semiring *supertropical* yang merupakan aljabar *supertropical*. Selain itu juga diberikan beberapa contoh untuk memudahkan dalam pemahaman.

4.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen *Supertropical*

Misalkan $\mathcal{R} = (R, \mathcal{G}_0, \nu)$ adalah suatu semiring *supertropical* dengan R adalah semiring $(T, \oplus, \otimes)$ dimana $T = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^\nu \cup \{-\infty\}$ dan $\mathcal{G}_0 = \{a^\nu | \forall a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}\}$, serta ν adalah pemetaan $\nu: R \to \mathcal{G}_0$, definisi nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian dari matriks persegi $A \in M_n(\mathcal{R})$ seperti yang dijumpai pada aljabar linier juga dijumpai pada aljabar *supertropical*. Akan tetapi, pada aljabar *supertropical* didefinisikan secara berbeda, hal ini berkaitan dengan operasi *ghost surpasses* ($\vDash_{gs}$). Misalkan suatu vektor $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in T^{(n)}$, dikatakan bahwa $\boldsymbol{u}$ *ghost surpasses* $\boldsymbol{v}$ yaitu $\boldsymbol{u} \vDash_{gs} \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{c}$, untuk suatu $\boldsymbol{c} \in \mathcal{G}_0{}^{(n)}$ vektor *ghost*. Relasi *ghost surpasses* $\boldsymbol{u} \vDash_{gs} \boldsymbol{v}$ mengakibatkan $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}^{(n)}$, yang ekuivalen dengan $u_i \oplus v_i \in \mathcal{G}_0$ untuk setiap $i = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Berbeda dengan pendefinisian nilai eigen dan vektor eigen pada aljabar linier, dimana harus memenuhi persamaan $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ yang bermakna untuk suatu vektor tak nol $\boldsymbol{v}$ maka $A\boldsymbol{v}$ adalah kelipatan skalar dari $\boldsymbol{v}$ sebesar λ, maka pada pendefinisian nilai eigen dan vektor eigen dengan menggunakan operasi *ghost surpasses* yaitu memenuhi persamaan

$$A \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \lambda \otimes \boldsymbol{v} \Leftrightarrow A \otimes \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}.$$

Berdasarkan sifat dari *ghost surpasses* maka diperoleh

$$A \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \lambda \otimes \boldsymbol{v} \Rightarrow A \otimes \boldsymbol{v} \oplus \lambda \otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0^{(n)} \tag{4.1}$$

Agar didapatkan nilai eigen dari matriks persegi A dengan menggunakan persamaan (4.1), maka persamaan dapat dituliskan kembali sebagai

$$A \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \lambda \otimes I \otimes \boldsymbol{v} \tag{4.2}$$

dengan I adalah matriks identitas dimana elemen diagonalnya adalah elemen satuan pada $\mathcal{R}$ yaitu 0 dan selainnya adalah $\varepsilon = -\infty$, dari persamaan (4.2) maka diperoleh

$$A \otimes \boldsymbol{v} \oplus \lambda \otimes I \otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0^{(n)},$$

atau dapat dituliskan sebagai

$$(A \oplus \lambda \otimes I) \otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0^{(n)}.$$

Nilai $\lambda \in \mathbb{R}_\varepsilon$ dimana $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ diperoleh dari nilai akar-akar polinomial karakteristik $|A \oplus \lambda \otimes I|$ yang memenuhi

$$|A \oplus \lambda \otimes I| \in \mathcal{G}_0.$$

Bentuk $|A \oplus \lambda \otimes I|$ adalah suatu poliomial dengan pangkat tertinggi n untuk A adalah matriks persegi dengan ukuran $n \times n$. Nilai-nilai λ yang memenuhi $|A \oplus \lambda \otimes I| \in \mathcal{G}_0$ adalah nilai-nilai eigen dari matriks persegi A atas semiring $\mathcal{R}$. Vektor tak nol $\boldsymbol{v}$ yang terkait dengan nilai eigen λ diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan homogen $B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \varepsilon \Rightarrow B \otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0^{(n)}$ dimana matriks B diberikan oleh $B = (A \oplus \lambda \otimes I)$. Solusi dari sistem persamaan homogen $B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \varepsilon$ adalah setiap kolom tak nol pada adjoin matriks B. Adjoin matriks B dinotasikan sebagai $adj(B)$ didefinisikan sebagai matriks transpose dari minor matriks B, dimana minor matriks B diperoleh dengan cara menghapus baris ke-i dan kolom ke-j yang bersesuaian pada matriks B [5]. Setiap kolom pada matriks $adj(B)$ yang memenuhi persamaan $A \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \lambda \otimes \boldsymbol{v} \Leftrightarrow A \otimes \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$ untuk suatu nilai eigen λ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ dari matriks A. Secara formal definisi mengenai nilai eigen dan vektor eigen didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 4.1.1 *Weak Generalized Supertropical Eigenvalue* dan *Weak Generalizeed Supertropical Eigenvector* [4]

Misalkan $\mathcal{R}$ adalah semiring *supertropical* dan matriks $A \in M_n(\mathcal{R})$ adalah matriks persegi berukuran $n \times n$ atas semiring *supertropical* $\mathcal{R}$. Suatu vektor tak nol $\boldsymbol{v}$ adalah *weak generalized supertropical eigenvector* dari A dengan *weak generalized supertropical eigenvalue* $\lambda \in \mathbb{R}$ jika memenuhi $A \otimes \boldsymbol{v} \oplus \lambda \otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0$.

Definisi 4.1.2 Nilai Eigen *Supertropical* dan Vektor Eigen *Supertropical* [5]

Misalkan $\mathcal{R}$ adalah semiring *supertropical* dan matriks $A \in M_n(\mathcal{R})$ adalah matriks persegi berukuran $n \times n$ atas semiring *supertropical* $\mathcal{R}$. Suatu vektor *tangible* $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}_\varepsilon{}^{(n)}$ adalah vektor eigen *supertropical* dari matriks A dengan nilai eigen *supertropical* $\lambda \in \mathbb{R}_\varepsilon$ jika memenuhi $A \otimes \boldsymbol{v} \vDash_{gs} \lambda \otimes \boldsymbol{v}$

Kedua definisi di atas menunjukkan bahwa untuk setiap v_i dengan $i \in \{1,2,\dots,n\}$ pada *weak generalized supertropical eigenvector* $\boldsymbol{v}$ tidak harus elemen *tangible*, akan tetapi elemen pada vektor eigen *supertropical* merupakan elemen *tangible*. Selain itu, berdasarkan sifat dari relasi *ghost surpasses* dapat diketahui bahwa untuk setiap pasangan nilai eigen dan vektor eigen yang memenuhi $A \otimes \boldsymbol{v} \vDash_{gs} \lambda \otimes \boldsymbol{v}$ ekuivalen dengan $A \otimes \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$ dan mengakibatkan $A \otimes \boldsymbol{v} \oplus \lambda \otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0$ sehingga setiap nilai eigen *supertropical* adalah *weak generalized supertropical eignenvalue*.

Misalkan untuk $n = 3$ matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in M_3(\mathcal{R})$ dan $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}_\varepsilon{}^{(3)}$, maka persamaan $A \otimes \boldsymbol{v} \vDash_{gs} \lambda \otimes \boldsymbol{v} \Leftrightarrow A \otimes \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$ untuk suatu vektor *ghost* $\boldsymbol{u} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$, diberikan oleh

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \lambda \otimes \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \otimes v_1 \oplus a_{12} \otimes v_2 \oplus a_{13} \otimes v_3 \\ a_{21} \otimes v_1 \oplus a_{22} \otimes v_2 \oplus a_{23} \otimes v_3 \\ a_{31} \otimes v_1 \oplus a_{32} \otimes v_2 \oplus a_{33} \otimes v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \otimes v_1 \\ \lambda \otimes v_2 \\ \lambda \otimes v_3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}\otimes v_1 \oplus a_{12}\otimes v_2 \oplus a_{13}\otimes v_3 \\ a_{21}\otimes v_1 \oplus a_{22}\otimes v_2 \oplus a_{23}\otimes v_3 \\ a_{31}\otimes v_1 \oplus a_{32}\otimes v_2 \oplus a_{33}\otimes v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\otimes v_1 \oplus v_1 \\ \lambda\otimes v_2 \oplus v_2 \\ \lambda\otimes v_3 \oplus v_3 \end{bmatrix}.$$

Karena $A\otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \lambda\otimes \boldsymbol{v} \Rightarrow A\otimes \boldsymbol{v} \oplus \lambda\otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0^{(3)}$ maka bentuk $A\otimes \boldsymbol{v}\oplus \lambda\otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0^{(3)}$ diberikan oleh

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \oplus \lambda\otimes \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0^{(3)}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}\otimes v_1 \oplus a_{12}\otimes v_2 \oplus a_{13}\otimes v_3 \oplus \lambda\otimes v_1 \\ a_{21}\otimes v_1 \oplus a_{22}\otimes v_2 \oplus a_{23}\otimes v_3 \oplus \lambda\otimes v_2 \\ a_{31}\otimes v_1 \oplus a_{32}\otimes v_2 \oplus a_{33}\otimes v_3 \oplus \lambda\otimes v_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0^{(3)}$$

atau secara ekuivalen yaitu

$$a_{11}\otimes v_1 \oplus a_{12}\otimes v_2 \oplus a_{13}\otimes v_3 \oplus \lambda\otimes v_1 \in \mathcal{G}_0,$$
$$a_{21}\otimes v_1 \oplus a_{22}\otimes v_2 \oplus a_{23}\otimes v_3 \oplus \lambda\otimes v_2 \in \mathcal{G}_0,$$
$$a_{31}\otimes v_1 \oplus a_{32}\otimes v_2 \oplus a_{33}\otimes v_3 \oplus \lambda\otimes v_3 \in \mathcal{G}_0.$$

Langkah langkah untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen pada aljabar *supertropical* yaitu

1. Diketahui matriks persegi atas semiring *supertropical*,
2. Membentuk polinomial karakteristik $(\lambda\otimes I \oplus A)$
3. Mencari akar-akar polinomial karakteristik $\lambda \in \mathbb{R}$ yang memenuhi persamaan $f(\lambda) = |\lambda\otimes I \oplus A| \in \mathcal{G}_0$ sehingga diperoleh suatu nilai eigen λ,
4. Mencari solusi sistem persamaan homogen untuk masing-masing nilai eigen λ yaitu $B\otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \boldsymbol{\varepsilon}$ dengan matriks $B = (\lambda\otimes I \oplus A)$ sehingga diperoleh suatu vektor eigen $\boldsymbol{v}$,
5. Memeriksa setiap kolom pada solusi sistem persamaan homogen yang memenuhi $A\otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \lambda\otimes \boldsymbol{v} \Leftrightarrow A\otimes \boldsymbol{v} = \lambda\otimes \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$ dan $A\otimes \boldsymbol{v} \oplus \lambda\otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0$.

Berikut ini diberikan contoh untuk mencari nlai eigen dan vektor eigen pada aljabar *supertropical*.

Contoh 4.1.1

Diberikan semiring *supertropical* $\mathcal{R} = (R, \mathcal{G}_0, v)$ dengan R adalah semiring $(T, \oplus, \otimes)$ dimana $T = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^{v} \cup \{-\infty\}$ dan $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathcal{R})$ adalah matriks atas semiring $\mathcal{R}$. Nilai eigen dari matriks A diperoleh dengan mencari akar persamaan karakteristik yang memenuhi $|\lambda \otimes I \oplus A| \in \mathcal{G}_0$ yaitu

$$\left|\lambda \otimes \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right| \in \mathcal{G}_0$$

$$\left|\begin{bmatrix} \lambda \otimes 0 & \lambda \otimes \varepsilon \\ \lambda \otimes \varepsilon & \lambda \otimes 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right| \in \mathcal{G}_0$$

$$\left|\begin{bmatrix} \lambda \otimes 0 \oplus 4 & \lambda \otimes \varepsilon \oplus 0 \\ \lambda \otimes \varepsilon \oplus 0 & \lambda \otimes 0 \oplus 1 \end{bmatrix}\right| \in \mathcal{G}_0$$

$$\left|\begin{bmatrix} \lambda \oplus 4 & 0 \\ 0 & \lambda \oplus 1 \end{bmatrix}\right| \in \mathcal{G}_0$$

dengan menggunakan permutasi dari $n = 2$ yaitu

$$(\lambda \oplus 4) \otimes (\lambda \oplus 1) \oplus 0 \otimes 0 \in \mathcal{G}_0$$

$$(\lambda \oplus 4) \otimes (\lambda \oplus 1) \oplus 0 \in \mathcal{G}_0$$

$$\lambda^2 \oplus \lambda \otimes 1 \oplus \lambda \otimes 4 \oplus 4 \otimes 1 \oplus 0 \in \mathcal{G}_0$$

diperoleh

$$\lambda^2 \oplus \lambda \otimes 4 \oplus 5 \in \mathcal{G}_0$$

Dengan demikian diperoleh dua nilai eigen berbeda yaitu $\lambda_1 = 4$ dan $\lambda_2 = 1$, sebab untuk $\lambda_1 = 4$ memenuhi $\lambda^2 \oplus \lambda \otimes 4 \oplus 5 = 8^{v} \in \mathcal{G}_0$ dan untuk $\lambda_2 = 1$ memenuhi $\lambda^2 \oplus \lambda \otimes 4 \oplus 5 = 5^{v} \in \mathcal{G}_0$. Vektor eigen $\boldsymbol{v}$ diperoleh dengan mencari penyelesaian sistem persamaan homogen

$$B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \varepsilon \Rightarrow B \otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0^{(2)}.$$

Matriks B untuk nilai eigen $\lambda_1 = 4$ yaitu

$$B = (\lambda \otimes I \oplus A) = \begin{bmatrix} 4 \oplus 4 & 0 \\ 0 & 4 \oplus 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^{v} & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

sehingga sistem persamaan homogen yang diperoleh adalah

$$B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \boldsymbol{\varepsilon},$$

$$B \otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0^{(2)},$$

$$\begin{bmatrix} 4^{v} & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(2)},$$

yang ekuivalen dengan

$$4^{v} \otimes v_1 \oplus 0 \otimes v_2 \in \mathcal{G}_0,$$

$$0 \otimes v_1 \oplus 4 \otimes v_2 \in \mathcal{G}_0.$$

Dengan menggunakan cara penyelesaian sistem persamaan homogen maka diperoleh $adj(B) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4^{v} \end{bmatrix}$, dengan demikian penyelesaian sitem persamaan $B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \boldsymbol{\varepsilon}$ adalah $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4^{v} \end{bmatrix}$. Selanjutnya diselidiki untuk $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4^{v} \end{bmatrix}$ apakah merupakan vektor-vektor eigen terkait dengan nilai eigen $\lambda_1 = 4$ dengan ditunjukkan bahwa:

1. untuk $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ memenuhi

$$A \otimes \boldsymbol{v_1} \models_{gs} \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_1}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A \otimes \boldsymbol{v_1} = \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_1} \oplus \boldsymbol{u},$$

dan juga diperoleh bahwa $A \otimes \boldsymbol{v_1} \oplus \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_1} \in \mathcal{G}_0{}^{(2)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \oplus 4 \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8^{v} \\ 4^{v} \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(2)}.$$

2. untuk $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4^{v} \end{bmatrix}$ memenuhi

$$A \otimes \boldsymbol{v_2} \not\models_{gs} \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_2},$$

karena nilai $A \otimes \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 4^{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^{v} \\ 5^{v} \end{bmatrix}$ dan $\lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_2} = 4 \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 4^{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8^{v} \end{bmatrix}$ dapat dilihat bahwa $\begin{bmatrix} 4^{v} \\ 5^{v} \end{bmatrix} \not\succeq_{v} \begin{bmatrix} 4 \\ 8^{v} \end{bmatrix}$ sehingga tidak dapat ditemukan suatu vektor $\boldsymbol{u}$ yang memenuhi $A \otimes \boldsymbol{v_2} = \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_2} \oplus \boldsymbol{u}$ Akan tetapi dapat dilihat bahwa $A \otimes \boldsymbol{v_2} \oplus \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_2} \in \mathcal{G}_0{}^{(2)}$ terpenuhi, yaitu

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 4^{v} \end{bmatrix} \oplus 4 \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 4^{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^{v} \\ 5^{v} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 4 \\ 8^{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^{v} \\ 8^{v} \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(2)}.$$

Berdasarkan penjelasan di atas, maka $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen *supertropical* terkait dengan nilai eigen *supertropical* $\lambda_1 = 4$, sedangkan $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4^v \end{bmatrix}$ adalah *weak generalized supertropical eigenvector* yang terkait dengan *weak generalized supertropical eigenvalue* $\lambda_1 = 4$.

Dengan cara yang sama untuk nilai eigen $\lambda_2 = 1$, matriks B diberikan oleh

$$B = (\lambda \otimes I \oplus A) = \begin{bmatrix} 1 \oplus 4 & 0 \\ 0 & 1 \oplus 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1^v \end{bmatrix},$$

sehingga sistem persamaan homogen yang diperoleh adalah

$$B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \boldsymbol{\varepsilon},$$

$$B \otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0^{(2)},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1^v \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0^{(2)},$$

yang ekuivalen dengan

$$4 \otimes v_1 \oplus 0 \otimes v_2 \in \mathcal{G}_0,$$

$$0 \otimes v_1 \oplus 1^v \otimes v_2 \in \mathcal{G}_0.$$

Dengan menggunakan cara penyelesaian sistem persamaan homogen maka diperoleh $adj(B) = \begin{bmatrix} 1^v & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, dengan demikian penyelesaian sistem persamaan $B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \boldsymbol{\varepsilon}$, adalah $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 1^v \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$. Selanjutnya diselidiki apakah $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 1^v \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ adalah vektor-vektor eigen terkait dengan nilai eigen $\lambda_2 = 1$ dengan ditunjukkan bahwa:

1. untuk $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 1^v \\ 0 \end{bmatrix}$ memenuhi

$$A \otimes \boldsymbol{v_1} \models_{gs} \lambda_2 \otimes \boldsymbol{v_1}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1^v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^v \\ 1^v \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 1^v \\ 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 5^v \\ 1^v \end{bmatrix}$$

$$A \otimes \boldsymbol{v_1} = \lambda_2 \otimes \boldsymbol{v_1} \oplus \boldsymbol{v_1},$$

dan juga diperoleh bahwa $A \otimes \boldsymbol{v_1} \oplus \lambda_2 \otimes \boldsymbol{v_1} \in \mathcal{G}_0^{(2)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1^{v}\\0\end{bmatrix} \oplus 1 \otimes \begin{bmatrix}1^{v}\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5^{v}\\1^{v}\end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix}2^{v}\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5^{v}\\1^{v}\end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(2)}.$$

2. untuk $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$ memenuhi

$$A \otimes \boldsymbol{v_2} \vDash_{gs} \lambda_2 \otimes \boldsymbol{v_2}$$

$$\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4^{v}\\5\end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix}4^{v}\\0^{v}\end{bmatrix}$$

$$A \otimes \boldsymbol{v_2} = \lambda_2 \otimes \boldsymbol{v_2} \oplus \boldsymbol{u_2},$$

dan juga diperoleh bahwa $A \otimes \boldsymbol{v_2} \oplus \lambda_2 \otimes \boldsymbol{v_2} \in \mathcal{G}_0{}^{(2)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix} \oplus 1 \otimes \begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4^{v}\\5\end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4^{v}\\5^{v}\end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(2)}.$$

Berdasarkan penjelasan di atas, maka vektor $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix}1^{v}\\0\end{bmatrix}$ disebut *weak generalized supertropical eigenvector* yang terkait dengan *weak generalized supertropical eigenvalue* $\lambda_2 = 1$ dan vektor $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$ disebut vektor eigen *supertropical* yang terkait dengan nilai eigen *supertropical* $\lambda_2 = 1$.

□

Nilai eigen dari matriks persegi $A \in M_n(\mathcal{R})$ diperoleh dari akar-akar persamaan karakteristik $|\lambda \otimes I \oplus A|$. Bentuk persamaan karakteristik $|\lambda \otimes I \oplus A|$ adalah suatu polinomial dengan pangkat tertinggi n, sehingga berdasarkan **Definisi 2.3.14** akar-akar persamaan karakteristik $f(\lambda) = |\lambda \otimes I \oplus A|$ adalah $\lambda \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $f(\lambda) \in \mathcal{G}_0$. Akar-akar persamaan karakteristik $f(\lambda) = |\lambda \otimes I \oplus A|$ dapat memiliki nilai yang sama maupun berbeda, sehingga nilai eigen dari matriks persegi $A \in M_n(\mathcal{R})$ memiliki kemungkinan bernilai tunggal maupun tidak tunggal. Nilai eigen dari matriks persegi $A \in M_n(\mathcal{R})$ dengan $n \geq 2$ bernilai tunggal ketika memiliki bentuk polinomial

$$f(\lambda) = \lambda^{n} \oplus \lambda^{n-1} \otimes a_{n-1} \oplus \lambda^{n-2} \otimes a_{n-2} \oplus \dots \oplus a_0$$

dimana koefisien polinomial $a_{n-1} < a_{n-2} < \cdots < a_0$ dan untuk setiap koefisien polinomial a_{n-k} memenuhi $a_{n-k} = b \otimes a_{n-(k-1)}$ dengan $k = 1,2, \dots, n-1$ dan $b \in \mathbb{R}$. Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut.

Bukti:

Diketahui matriks persegi $A \in M_n(\mathcal{R})$ memiliki persamaan karakteristik $f(\lambda) = \lambda^n \oplus \lambda^{n-1} \otimes a_{n-1} \oplus \lambda^{n-2} \otimes a_{n-2} \oplus \dots \oplus a_0$ dengan $a_{n-1} < a_{n-2} < \dots < a_0$ dan untuk setiap koefisien polinomial a_{n-k} maka $a_{n-k} = b \otimes a_{n-(k-1)}$ dengan $k = 1,2,\dots,n$ dan $b \in \mathbb{R}$, akan ditunjukkan bahwa nilai eigen dari matriks $A \in M_n(\mathcal{R})$ adalah tunggal. Berdasarkan **Definisi 2.3.14**, akar persamaan karakterisktik $f(\lambda)$ adalah $\lambda \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $f(\lambda) \in \mathcal{G}_0$, agar dipenuhi bahwa $f(\lambda) \in \mathcal{G}_0$ maka harus terdapat minimal dua monomial yang memiliki nilai yang sama, andaikan dua monomial yang sama adalah $\lambda^{n-k} \otimes a_{n-k}$ dan $\lambda^{n-(k-1)} \otimes a_{n-(k-1)}$ yaitu

$$\lambda^{n-k} \otimes a_{n-k} = \lambda^{n-(k-1)} \otimes a_{n-(k-1)},$$

dengan menggunakan sifat perpangkatan pada operasi $\otimes$ maka diperoleh

$$(n-k)\lambda \otimes a_{n-k} = \big(n-(k-1)\big)\lambda \otimes a_{n-(k-1)}$$

karena $\otimes$ bermakna penjumlahan, maka diperoleh

$$(n-k)\lambda + a_{n-k} = \big(n-(k-1)\big)\lambda + a_{n-(k-1)}$$

$$(n-k)\lambda - \big(n-(k-1)\big)\lambda = a_{n-(k-1)} - a_{n-k}$$

$$\Big((n-k) - \big(n-(k-1)\big)\Big)\lambda = a_{n-(k-1)} - a_{n-k}$$

karena diketahui $a_{n-k} = b \otimes a_{n-(k-1)}$ dan $\otimes$ bermakna penjumlahan maka $b = a_{n-k} - a_{n-(k-1)}$ sehingga diperoleh

$$-\lambda = -b$$

$$\lambda = b.$$

Dengan demikian terbukti bahwa setiap nilai eigen tunggal yaitu $\lambda = b$.

■

Berikut ini diberikan contoh matriks persegi atas semiring *supertropical* dengan nilai eigen tunggal.

Contoh 4.1.2

Diberikan semiring *supertropical* $\mathcal{R} = (R, \mathcal{G}_0, v)$ dengan R adalah semiring $(T, \oplus, \otimes)$ dimana $T = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^{\nu} \cup \{-\infty\}$ dan $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathcal{R})$ adalah matriks atas semiring $\mathcal{R}$. Nilai eigen dari matriks A diperoleh dengan mencari akar-akar persamaan karakteristik yang memenuhi $|\lambda \otimes I \oplus A| \in \mathcal{G}_0$ yaitu

$$\left| \lambda \otimes \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 2 \end{bmatrix} \right| \in \mathcal{G}_0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \lambda & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \lambda \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 2 \end{bmatrix} \right| \in \mathcal{G}_0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda \oplus 0 & 1 & 0 \\ 3 & \lambda \oplus 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & \lambda \oplus 2 \end{bmatrix} \right| \in \mathcal{G}_0$$

dengan menggunakan permutasi dari $n = 3$ diperoleh

$$\big((\lambda \oplus 0) \otimes (\lambda \oplus 1) \otimes (\lambda \oplus 2) \oplus 5 \oplus (\lambda \oplus 2) \otimes 3 \otimes 1\big) \in \mathcal{G}_0$$

$$\lambda^3 \oplus \lambda^2 \otimes 2 \oplus \lambda \otimes 3 \oplus 3 \oplus 5 \oplus \lambda \otimes 4 \oplus 6 \in \mathcal{G}_0$$

$$\lambda^3 \oplus \lambda^2 \otimes 2 \oplus \lambda \otimes 4 \oplus 6 \in \mathcal{G}_0$$

Sehingga diperoleh akar polinomial yaitu $\lambda = 2$ sebab untuk nilai $\lambda = 2$ memenuhi $\lambda^3 \oplus \lambda^2 \otimes 2 \oplus \lambda \otimes 4 \oplus 6 = 6 \oplus 6 \oplus 6 \oplus 6 = 6^{\nu} \in \mathcal{G}_0$ dengan demikian $\lambda = 2$ adalah nilai eigen. Selanjutnya vektor eigen $\boldsymbol{v}$ diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan homogen

$$B \otimes \boldsymbol{v} \models_{\mathcal{G}s} \varepsilon \Rightarrow B \otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0^{(3)}$$

dengan matriks B untuk nilai eigen $\lambda = 2$ yaitu

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 2^{\nu} \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian sistem persamaan homogen yang diperoleh adalah

$$B \otimes \boldsymbol{v} \models_{\mathcal{G}s} \varepsilon,$$

$$B \otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0^{(3)},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 2^{\nu} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)},$$

yang ekuivalen dengan

$$2 \otimes v_1 \oplus 1 \otimes v_2 \oplus 0 \otimes v_3 \in \mathcal{G}_0,$$

$$3 \otimes v_1 \oplus 2 \otimes v_2 \oplus \varepsilon \otimes v_3 \in \mathcal{G}_0,$$

$$\varepsilon \otimes v_1 \oplus 2 \otimes v_2 \oplus 2^{\nu} \otimes v_3 \in \mathcal{G}_0.$$

Dengan menggunakan penyelesaian sistem persamaan homogen, didapatkan $adj(B) = \begin{bmatrix} 4^{\nu} & 3^{\nu} & 2 \\ 5^{\nu} & 4^{\nu} & 3 \\ 5 & 4 & 4^{\nu} \end{bmatrix}$ sehingga solusi sistem persamaan homogen $B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \boldsymbol{\varepsilon}$ adalah $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 4^{\nu} \\ 5^{\nu} \\ 5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 3^{\nu} \\ 4^{\nu} \\ 4 \end{bmatrix}$, dan $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4^{\nu} \end{bmatrix}$. Selanjutnya diselidiki apakah $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 4^{\nu} \\ 5^{\nu} \\ 5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 3^{\nu} \\ 4^{\nu} \\ 4 \end{bmatrix}$, dan $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4^{\nu} \end{bmatrix}$ adalah vektor-vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen $\lambda_1 = 2$, hal ini dapat ditunjukkan dengan

1. untuk $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 4^{\nu} \\ 5^{\nu} \\ 5 \end{bmatrix}$ memenuhi

$$A \otimes \boldsymbol{v_1} \models_{gs} \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4^{\nu} \\ 5^{\nu} \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6^{\nu} \\ 7^{\nu} \\ 7^{\nu} \end{bmatrix} = 2 \otimes \begin{bmatrix} 4^{\nu} \\ 5^{\nu} \\ 5 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 7^{\nu} \end{bmatrix}$$

$$A \otimes \boldsymbol{v_1} = \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_1} \oplus \boldsymbol{u_1}$$

dan juga diperoleh bahwa $A \otimes \boldsymbol{v_1} \oplus \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_1} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4^{\nu} \\ 5^{\nu} \\ 5 \end{bmatrix} \oplus 2 \otimes \begin{bmatrix} 4^{\nu} \\ 5^{\nu} \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6^{\nu} \\ 7^{\nu} \\ 7^{\nu} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 6^{\nu} \\ 7^{\nu} \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6^{\nu} \\ 7^{\nu} \\ 7^{\nu} \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

2. untuk $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 3^{\nu} \\ 4^{\nu} \\ 4 \end{bmatrix}$ memenuhi

$$A \otimes \boldsymbol{v_2} \models_{gs} \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3^{\nu} \\ 4^{\nu} \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^{\nu} \\ 6^{\nu} \\ 6^{\nu} \end{bmatrix} = 2 \otimes \begin{bmatrix} 3^{\nu} \\ 4^{\nu} \\ 4 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 6^{\nu} \end{bmatrix}$$

$$A \otimes \boldsymbol{v_2} = \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_2} \oplus \boldsymbol{u_2}$$

dan juga diperoleh bahwa $A \otimes \boldsymbol{v_2} \oplus \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_2} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3^{\nu} \\ 4^{\nu} \\ 4 \end{bmatrix} \oplus 2 \otimes \begin{bmatrix} 3^{\nu} \\ 4^{\nu} \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^{\nu} \\ 6^{\nu} \\ 6^{\nu} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 5^{\nu} \\ 6^{\nu} \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^{\nu} \\ 6^{\nu} \\ 6^{\nu} \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

3. untuk $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4^{\nu} \end{bmatrix}$ memenuhi

$$A \otimes \boldsymbol{v_3} \vDash_{gs} \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4^{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^{\nu} \\ 5 \\ 6^{\nu} \end{bmatrix} = 2 \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4^{\nu} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 4^{\nu} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A \otimes \boldsymbol{v_3} = \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_3} \oplus \boldsymbol{u_3}$$

dan juga diperoleh bahwa $A \otimes \boldsymbol{v_3} \oplus \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_3} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4^{\nu} \end{bmatrix} \oplus 2 \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4^{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^{\nu} \\ 5 \\ 6^{\nu} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6^{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^{\nu} \\ 5^{\nu} \\ 6^{\nu} \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

Berdasarkan perhitungan di atas, maka vektor $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 4^{\nu} \\ 5^{\nu} \\ 5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 3^{\nu} \\ 4^{\nu} \\ 4 \end{bmatrix}$, dan $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4^{\nu} \end{bmatrix}$ adalah *weak generalized supertropical eigenvector* yang terkait dengan *weak generalized supertropical eigenvalue* $\lambda_1 = 2$.

□

Pada **Contoh 4.1.2** dapat dilihat bahwa $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 4^{\nu} \\ 5^{\nu} \\ 5 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 3^{\nu} \\ 4^{\nu} \\ 4 \end{bmatrix}$ keduanya adalah vektor eigen untuk $\lambda_1 = 2$, dimana kedua vektor eigen tersebut dapat dituliskan

$$\boldsymbol{v_1} = 1 \otimes \boldsymbol{v_2} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 3^{\nu} \\ 4^{\nu} \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^{\nu} \\ 5^{\nu} \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Hal ini menunjukkan bahwa vektor eigen $\boldsymbol{v}$ yang terkait dengan nilai eigen λ tidak tunggal. Berdasarkan pembahasan tersebut dapat disimpulkan bahwa, jika diberikan suatu matriks persegi $A \in M_n(\mathcal{R})$ dan λ adalah nilai eigen dari A, maka vektor eigen $\boldsymbol{v}$ yang terkait dengan nilai eigen λ bernilai tidak tunggal, hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut.

Bukti.

Diketahui bahwa $\lambda \in \mathbb{R}_\varepsilon$ adalah nilai eigen dari matriks persegi $A \in M_n(\mathcal{R})$ dan vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen λ adalah $\boldsymbol{v}$, maka berdasarkan **Definisi 4.1.2** memenuhi

$$A \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \lambda \otimes \boldsymbol{v}. \tag{4.3}$$

Berdasarkan persamaan (4.3) maka berlaku

$$A \otimes \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}, \tag{4.4}$$

untuk suatu vektor $\boldsymbol{u} \in \mathcal{G}_0{}^{(n)}$. Persamaan (4.4) dikalikan dengan sebarang skalar $k \in \mathbb{R}$ maka diperoleh

$$k \otimes (A \otimes \boldsymbol{v}) = k \otimes (\lambda \otimes \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u})$$

$$A \otimes (k \otimes \boldsymbol{v}) = \lambda \otimes (k \otimes \boldsymbol{v}) \oplus (k \otimes \boldsymbol{u}).$$

Karena $k \otimes \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{(n)}$, $(k \otimes \boldsymbol{u}) \in \mathcal{G}_0{}^{(n)}$ suatu vektor dan dimisalkan $\boldsymbol{v_1} = k \otimes \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u_1} = k \otimes \boldsymbol{u}$ maka diperoleh

$$A \otimes \boldsymbol{v_1} = \lambda \otimes \boldsymbol{v_1} \oplus \boldsymbol{u_1},$$

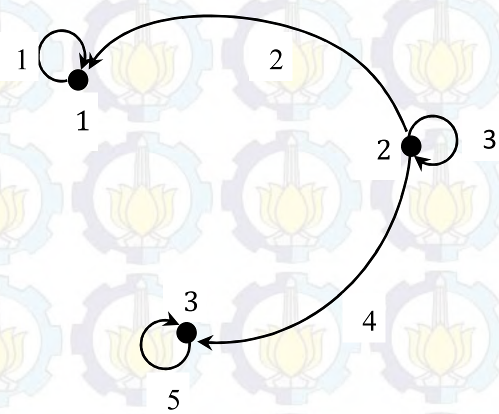
untuk suatu $\boldsymbol{u_1} \in \mathcal{G}_0{}^{(n)}$. Dengan demikian terbukti bahwa vektor eigen $\boldsymbol{v}$ memiliki nilai yang tidak tunggal, dan vektor eigen yang lain diberikan oleh $\boldsymbol{v_1} = k \otimes \boldsymbol{v}$ untuk sembarang $k \in \mathbb{R}$.

■

Suatu matriks atas semiring *supertropical* dapat direpresentasikan dalam bentuk graf berarah, seperti halnya yang ditemui pada aljabar maxplus. Pada [10] disebutkan bahwa, misalkan matriks $A \in M_n(\mathbb{R}_{max})$, suatu graf berarah dari matriks A adalah $G(A) = (\mathcal{N}, \mathcal{D})$ dimana graf $G(A)$ memiliki n titik. Himpunan semua titik dari $G(A)$ dinyatakan oleh $\mathcal{N}$ sedangkan himpunan semua *arc* (garis) dari graf $G(A)$ atau pasangan terurut dari beberapa titik di $\mathcal{N}$ dinotasikan oleh $\mathcal{D}$. Suatu garis dari titik j ke titik i ada jika bila $a_{ij} \neq \varepsilon$, garis ini dinotasikan oleh (j, i) sehingga $(j, i) \in$

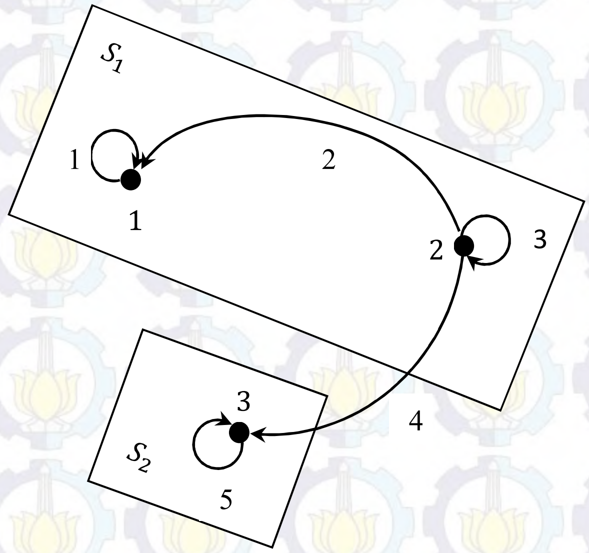
$\mathcal{D}$. Suatu barisan garis $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{l-1}, i_l)$ dari suatu graf disebut dengan path, sedangkan path elementer tertutup adalah suatu sirkuit. Sebarang sirkuit dengan sirkuit rata-rata maksimum dinamakan sirkuit kritis. Suatu graf dikatakan *strongly connected* bila suatu path ada untuk setiap titik i ke setiap titik j, dan bila matriks A memiliki representasi graf *strongly connected* maka matriks A dikatakan matriks *irreducible* (tak tereduksi). Sebaliknya untuk matriks A dengan representasi graf tidak *strongly connected* yaitu terdapat suatu titik yang tidak memiliki path, maka matriks A dikatakan matriks *reducible* (tereduksi).

Misalkan diberikan matriks dengan setiap entri pada matriks adalah elemen *tangible* yaitu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix}$, maka representasi graf dari matriks A seperti halnya pada aljabar maxplus adalah suatu graf tidak *strongly connected* karena tidak semua titik dapat dicapai dari suatu titik tertentu sebagai berikut:



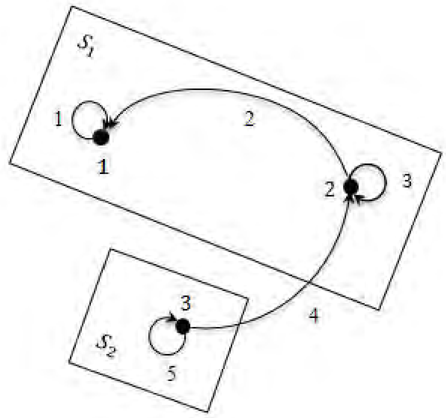
Gambar 4.1 Graf $G(A)$ representasi dari matriks A

Representasi graf dari matriks A pada Gambar 4.1 di atas dapat dipartisi menjadi dua bagian seperti berikut,

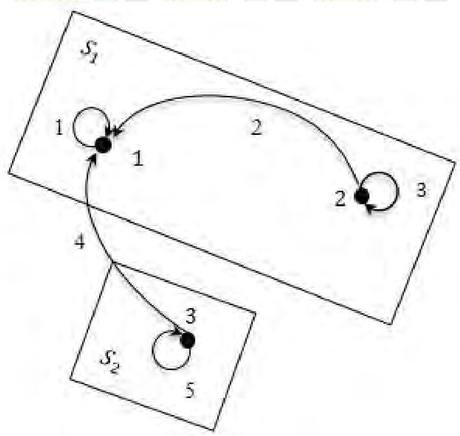


Gambar 4.2 Partisi graf $G(A)$

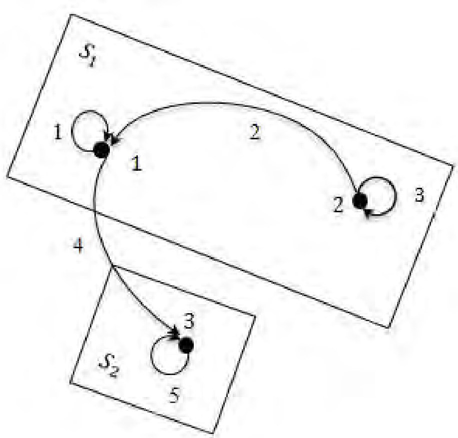
dengan S_1 adalah $G(A_{1,1})$ yaitu $A_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \varepsilon & 3 \end{bmatrix}$ dan S_2 adalah $G(A_{2,2})$ yaitu $[5]$. Kedua graf tersebut dihubungkan oleh suatu path dari titik 2 ke 3 degan bobot sebesar 4 yang ditunjukkan pada elemen $a_{3,2}$ dari matriks A. Berdasarkan Gambar 2 terdapat beberapa kemungkinan graf yang dapat dibentuk jika path yang menghubungkan kedua graf diubah arahnya. Apabila path dari 2 ke 3 diubah arahnya dari titik 3 ke 2 dengan kata lain elemen $a_{3,2} = \varepsilon$ dan $a_{2,3} = 4$ diperoleh matriks $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix}$, apabila path dari 2 ke 3 diubah arahnya dari titik 3 ke 1 dengan kata lain elemen $a_{3,2} = \varepsilon$ dan $a_{1,3} = 4$ diperoleh matriks $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathcal{R})$, sedangkan apabila path dari 2 ke 3 diubah arahnya dari titik 1 ke 3 dengan kata lain elemen $a_{3,2} = \varepsilon$ dan $a_{3,1} = 4$ diperoleh matriks $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathcal{R})$. Secara berturut-turut representasi graf dari matriks $C, D,$ dan E diberikan sebagai berikut:



Gambar 4.3 Representasi graf $G(C)$



Gambar 4.4 Representasi graf $G(D)$



Gambar 4.5 Representasi graf $G(E)$

Keempat graf di atas dapat dicari nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian dan dituliskan dalam empat kasus yang berbeda untuk graf $A, C, D,$ dan E secara berturut-turut yaitu Kasus 1, Kasus 2, Kasus 3, dan Kasus 4 sebagai berikut.

Contoh 4.1.3 (Kasus 1)

Diberikan semiring *supertropical* $\mathcal{R} = (R, \mathcal{G}_0, v)$ dengan R adalah semiring $(T, \oplus, \otimes)$ dimana $T = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^v \cup \{-\infty\}$ dan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathcal{R})$ adalah matriks atas semiring $\mathcal{R}$. Nilai eigen dari matriks A diperoleh dengan mencari akar-akar persamaan karakteristik $|\lambda \otimes I \oplus A|$ yaitu $\lambda \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $|\lambda \otimes I \oplus A| \in \mathcal{G}_0$ sebagai berikut

$$|\lambda \otimes I \oplus A| \in \mathcal{G}_0$$

$$\left| \lambda \otimes \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \right| \in \mathcal{G}_0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \lambda & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \lambda \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \right| \in \mathcal{G}_0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda \oplus 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \lambda \oplus 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \lambda \oplus 5 \end{bmatrix} \right| \in \mathcal{G}_0$$

dengan menggunakan permutasi untuk $n = 3$ maka diperoleh determinan matriks $(\lambda \otimes I \oplus A)$ yaitu

$$|\lambda \otimes I \oplus A| = \big((\lambda \oplus 1) \otimes (\lambda \oplus 3) \otimes (\lambda \oplus 5)\big) \in \mathcal{G}_0$$

$$= \lambda^3 \oplus \lambda^2 \otimes 5 \oplus \lambda \otimes 8 \oplus 9 \in \mathcal{G}_0.$$

Dengan demikian diperoleh tiga nilai eigen berbeda yaitu $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3$, dan $\lambda_3 = 1$, sebab untuk $\lambda_1 = 5$ maka persamaan karakteristik $\lambda^3 \oplus \lambda^2 \otimes 5 \oplus \lambda \otimes 8 \oplus 9 = 15^v \in \mathcal{G}_0$, untuk $\lambda_2 = 3$ maka persamaan karakteristik $\lambda^3 \oplus \lambda^2 \otimes 5 \oplus \lambda \otimes 8 \oplus 9 = 11^v \in \mathcal{G}_0$, dan untuk $\lambda_3 = 1$ maka persamaan karakteristik $\lambda^3 \oplus \lambda^2 \otimes 5 \oplus \lambda \otimes 8 \oplus 9 = 9^v \in \mathcal{G}_0$. Selanjutnya dicari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai λ_1, λ_2 dan λ_3 menggunakan penyelesaian sistem persamaan homogen

$$B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \varepsilon \Rightarrow B \otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0^{(3)}.$$

Bentuk matriks B untuk nilai eigen $\lambda_1 = 5$ yaitu

$$B = (\lambda \otimes I \oplus A) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5^{v} \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh sistem persamaan homogen yang diperoleh adalah

$$B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \varepsilon,$$

$$B \otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0^{(3)},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5^{v} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0^{(3)},$$

yang ekuivalen dengan

$$5 \otimes v_1 \oplus 2 \otimes v_2 \oplus \varepsilon \otimes v_3 \in \mathcal{G}_0,$$

$$\varepsilon \otimes v_1 \oplus 5 \otimes v_2 \oplus \varepsilon \otimes v_3 \in \mathcal{G}_0,$$

$$\varepsilon \otimes v_1 \oplus 4 \otimes v_2 \oplus 5^{v} \otimes v_3 \in \mathcal{G}_0.$$

Dengan menggunakan penyelesaian sistem persamaan homogen diperoleh $adj(B) = \begin{bmatrix} 10^{v} & 7^{v} & \varepsilon \\ \varepsilon & 10^{v} & \varepsilon \\ \varepsilon & 9 & 10 \end{bmatrix}$, maka solusi sistem persamaan homogen $B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \varepsilon$ adalah $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 10^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7^{v} \\ 10^{v} \\ 9 \end{bmatrix}$, dan $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix}$. Selanjutnya diselidiki apakah vektor-vektor $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, dan $\boldsymbol{v_3}$ adalah vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen $\lambda_1 = 5$, hal ini dapat ditunjukkan dengan

1. untuk $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 10^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ memenuhi

$$A \otimes \boldsymbol{v_1} \not\models_{gs} \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_1}$$

sebab nilai $A \otimes \boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 10^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ dan $\lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_1} = 5 \otimes \begin{bmatrix} 10^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$, dapat dilihat bahwa $\begin{bmatrix} 11^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \ngeq_{v} \begin{bmatrix} 15^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ sehingga tidak dapat ditemukan suatu vektor $\boldsymbol{u_1}$ yang dapat memenuhi $A \otimes \boldsymbol{v_1} = \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_1} \oplus \boldsymbol{u_1}$, akan tetapi $A \otimes \boldsymbol{v_1} \oplus \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_1} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ terpenuhi yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 10^{\nu} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus 5 \otimes \begin{bmatrix} 10^{\nu} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11^{\nu} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 15^{\nu} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15^{\nu} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

2. untuk $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7^{\nu} \\ 10^{\nu} \\ 9 \end{bmatrix}$ memenuhi

$$A \otimes \boldsymbol{v_2} \nvDash_{gs} \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_2},$$

sebab nilai $A \otimes \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7^{\nu} \\ 10^{\nu} \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12^{\nu} \\ 13^{\nu} \\ 14^{\nu} \end{bmatrix}$ dan $\lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_2} = 5 \otimes \begin{bmatrix} 7^{\nu} \\ 10^{\nu} \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12^{\nu} \\ 15^{\nu} \\ 14 \end{bmatrix}$, dapat dilihat bahwa $\begin{bmatrix} 12^{\nu} \\ 13^{\nu} \\ 14^{\nu} \end{bmatrix} \nvDash_{\nu} \begin{bmatrix} 12^{\nu} \\ 15^{\nu} \\ 14 \end{bmatrix}$ sehingga tidak dapat ditemukan suatu vektor $\boldsymbol{u_2}$ yang dapat memenuhi $A \otimes \boldsymbol{v_2} = \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_2} \oplus \boldsymbol{u_2}$, akan tetapi $A \otimes \boldsymbol{v_2} \oplus \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_2} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ terpenuhi yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7^{\nu} \\ 10^{\nu} \\ 9 \end{bmatrix} \oplus 5 \otimes \begin{bmatrix} 7^{\nu} \\ 10^{\nu} \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12^{\nu} \\ 13^{\nu} \\ 14^{\nu} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 12^{\nu} \\ 15^{\nu} \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12^{\nu} \\ 15^{\nu} \\ 14^{\nu} \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

3. untuk $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix}$ memenuhi

$$A \otimes \boldsymbol{v_3} \vDash_{gs} \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 15 \end{bmatrix} = 5 \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix},$$

$$A \otimes \boldsymbol{v_3} = \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_3} \oplus \boldsymbol{u_3},$$

dan juga diperoleh bahwa $A \otimes \boldsymbol{v_3} \oplus \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_3} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix} \oplus 5 \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 15 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 15^{\nu} \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

Berdasarkan penjelasan di atas, maka vektor $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 10^{\nu} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7^{\nu} \\ 10^{\nu} \\ 9 \end{bmatrix}$ adalah *weak generalized supertropical eigenvector* yang terkait dengan *weak generalized* *supertropical eigenvalue* $\lambda_1 = 5$, sedangkan vektor $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen *supertropical* yang terkait dengan nilai eigen *supertropical* $\lambda_1 = 5$.

Selanjutnya dengan cara yang sama bentuk matriks B untuk nilai eigen $\lambda_2 = 3$ yaitu

$$B = (\lambda \otimes I \oplus A) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3^v & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

sehingga sistem persamaan homogen yang diperoleh yaitu

$$B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \boldsymbol{\varepsilon},$$

$$B \otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0^{(3)},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3^v & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)},$$

yang ekuivalen dengan

$$3 \otimes v_1 \oplus 2 \otimes v_2 \oplus \varepsilon \otimes v_3 \in \mathcal{G}_0,$$

$$\varepsilon \otimes v_1 \oplus 3^v \otimes v_2 \oplus \varepsilon \otimes v_3 \in \mathcal{G}_0,$$

$$\varepsilon \otimes v_1 \oplus 4 \otimes v_2 \oplus 5 \otimes v_3 \in \mathcal{G}_0.$$

Dengan menggunakan penyelesaian sistem persamaan homogen diperoleh $adj(B) = \begin{bmatrix} 8^v & 7 & \varepsilon \\ \varepsilon & 8 & \varepsilon \\ \varepsilon & 7 & 6^v \end{bmatrix}$, maka solusi sistem persamaan homogen $B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \boldsymbol{\varepsilon}$ adalah $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 8^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$, dan $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 6^v \end{bmatrix}$. Selanjutnya diselidiki apakah vektor-vektor $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$dan $\boldsymbol{v_3}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_2 = 3$, hal ini dapat ditunjukkan dengan

1. untuk $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 8^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ memenuhi

$$A \otimes \boldsymbol{v_1} \not\models_{gs} \lambda_2 \otimes \boldsymbol{v_1},$$

sebab nilai $A \otimes \boldsymbol{u_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ dan nilai $\lambda_2 \otimes \boldsymbol{u_1} = 3 \otimes \begin{bmatrix} 8^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ dapat dilihat bahwa $\begin{bmatrix} 9^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \not\geq_v \begin{bmatrix} 11^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ sehingga tidak dapat ditemukan suatu vektor $\boldsymbol{u_1}$ yang dapat memenuhi $A \otimes \boldsymbol{u_1} = \lambda_2 \otimes \boldsymbol{u_1} \oplus \boldsymbol{u_1}$, akan tetapi $A \otimes \boldsymbol{u_1} \oplus \lambda_2 \otimes \boldsymbol{u_1} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ terpenuhi yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus 3 \otimes \begin{bmatrix} 8^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 11^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

2. untuk $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$ memenuhi

$$A \otimes \boldsymbol{u_2} \vDash_{gs} \lambda_2 \otimes \boldsymbol{u_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12^v \end{bmatrix} = 3 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 12^v \end{bmatrix}$$

$$A \otimes \boldsymbol{u_2} = \lambda_2 \otimes \boldsymbol{u_2} \oplus \boldsymbol{u_2},$$

dan juga diperoleh bahwa $A \otimes \boldsymbol{u_2} \oplus \lambda_2 \otimes \boldsymbol{u_2} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} \oplus 3 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12^v \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^v \\ 11^v \\ 12^v \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

3. untuk $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 6^v \end{bmatrix}$ memenuhi

$$A \otimes \boldsymbol{u_3} \vDash_{gs} \lambda_2 \otimes \boldsymbol{u_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 6^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 11^v \end{bmatrix} = 3 \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 6^v \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 11^v \end{bmatrix}$$

$$A \otimes \boldsymbol{u_3} = \lambda_2 \otimes \boldsymbol{u_3} \oplus \boldsymbol{u_3}$$

dan juga diperoleh bahwa $A \otimes \boldsymbol{u_3} \oplus \lambda_2 \otimes \boldsymbol{u_3} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 6^v \end{bmatrix} \oplus 3 \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 6^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 11^v \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 9^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 11^v \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

Berdasarkan penjelasan tersebut maka vektor-vektor $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 8^\nu \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 9^\nu \end{bmatrix}$ adalah *weak generalized supertropical eigenvector* yang terkait dengan *weak generalized supertropical eigenvalue* $\lambda_2 = 3$, sedangkan vektor $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen *supertropical* yang terkait dengan nilai eigen *supertropical* $\lambda_2 = 3$.

Dengan cara yang sama selanjutnya matriks B untuk nilai eigen $\lambda_3 = 1$ diperoleh

$$B = (\lambda \otimes I \oplus A) = \begin{bmatrix} 1^\nu & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

sehingga sistem persamaan homogen yang diperoleh yaitu

$$B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \varepsilon,$$

$$B \otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0^{(3)},$$

$$\begin{bmatrix} 1^\nu & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0^{(3)},$$

yang ekuivalen dengan

$$1^\nu \otimes v_1 \oplus 2 \otimes v_2 \oplus \varepsilon \otimes v_3 \in \mathcal{G}_0,$$

$$\varepsilon \otimes v_1 \oplus 3 \otimes v_2 \oplus \varepsilon \otimes v_3 \in \mathcal{G}_0,$$

$$\varepsilon \otimes v_1 \oplus 4 \otimes v_2 \oplus 5 \otimes v_3 \in \mathcal{G}_0.$$

Dengan menggunakan penyelesaian sistem persamaan homogen diperoleh $adj(B) = \begin{bmatrix} 8 & 7 & \varepsilon \\ \varepsilon & 6^\nu & \varepsilon \\ \varepsilon & 5^\nu & 4^\nu \end{bmatrix}$, maka solusi sistem persamaan homogen $B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \varepsilon$ adalah $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6^\nu \\ 5^\nu \end{bmatrix}$, dan $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 4^\nu \end{bmatrix}$. Selanjutnya diselidiki apakah vektor-vektor $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$, dan $\boldsymbol{v_3}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian untuk nilai eigen $\lambda_3 = 1$, hal ini dapat ditunjukkan dengan

1. untuk $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ memenuhi

$$A \otimes \boldsymbol{v_1} \vDash_{gs} \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_1} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A \otimes \boldsymbol{v_1} = \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_1} \oplus \boldsymbol{v_1}$$

dan juga diperoleh bahwa $A \otimes \boldsymbol{v_1} \oplus \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_1} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus 1 \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

2. untuk $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6^v \\ 5^v \end{bmatrix}$ memenuhi

$$A \otimes \boldsymbol{v_2} \vDash_{gs} \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 6^v \\ 5^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8^v \\ 9^v \\ 10^v \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 6^v \\ 5^v \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 8^v \\ 9^v \\ 10^v \end{bmatrix}$$

$$A \otimes \boldsymbol{v_2} = \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_2} \oplus \boldsymbol{v_2}$$

dan juga diperoleh bahwa $A \otimes \boldsymbol{v_2} \oplus \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_2} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 6^v \\ 5^v \end{bmatrix} \oplus 1 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 6^v \\ 5^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8^v \\ 9^v \\ 10^v \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 8 \\ 7^v \\ 6^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8^v \\ 9^v \\ 10^v \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

3. untuk $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 4^v \end{bmatrix}$ memenuhi

$$A \otimes \boldsymbol{v_3} \vDash_{gs} \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 4^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 9^v \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 4^v \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 9^v \end{bmatrix}$$

$$A \otimes \boldsymbol{v_3} = \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_3} \oplus \boldsymbol{v_3}$$

dan juga diperoleh bahwa $A \otimes \boldsymbol{v_3} \oplus \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_3} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 4^v \end{bmatrix} \oplus 1 \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 4^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 9^v \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 5^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 9^v \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

Berdasarkan penjelasan tersebut, maka vektor-vektor $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6^v \\ 5^v \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 4^v \end{bmatrix}$ adalah *weak generalized supertropical eigenvector* yang terkait dengan *weak generalized supertropical eigenvalue* $\lambda_3 = 1$, sedangkan vektor $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen *supertropical* yang terkait dengan nilai eigen *supertropical* $\lambda_3 = 1$.

□

Contoh 4.1.4 (Kasus 2)

Diberikan semiring *supertropical* $\mathcal{R} = (R, \mathcal{G}_0, v)$ dengan R adalah semiring $(T, \oplus, \otimes)$ dimana $T = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^v \cup \{-\infty\}$ dan $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathcal{R})$ adalah matriks atas semiring $\mathcal{R}$. Nilai eigen dari matriks C dicari dengan cara yang sama seperti pada **Contoh 4.1.3** yaitu dengan penyelesaian persamaan karakteristik sebagai berikut

$$|\lambda \otimes I \oplus C| \in \mathcal{G}_0$$

$$\left| \lambda \otimes \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \right| \in \mathcal{G}_0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \lambda & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \lambda \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \right| \in \mathcal{G}_0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda \oplus 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \lambda \oplus 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & \lambda \oplus 5 \end{bmatrix} \right| \in \mathcal{G}_0$$

sehingga diperoleh determinan matriks $(\lambda \otimes I \oplus C)$ yang sama seperti **Contoh 4.1.3**

$$|\lambda \otimes I \oplus A| = \left((\lambda \oplus 1) \otimes (\lambda \oplus 3) \otimes (\lambda \oplus 5)\right) \in \mathcal{G}_0$$

$$= \lambda^3 \oplus \lambda^2 \otimes 5 \oplus \lambda \otimes 8 \oplus 9 \in \mathcal{G}_0.$$

demikian juga dengan tiga nilai eigen berbeda yang diperoleh $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3$, dan $\lambda_3 = 1$. Selanjutnya dicari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai λ_1, λ_2 dan λ_3 menggunakan penyelesaian sistem persamaan homogen

$$B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow B \otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0^{(3)}.$$

Bentuk matriks B untuk nilai eigen $\lambda_1 = 5$ yaitu

$$B = (\lambda \otimes I \oplus C) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5^{\nu} \end{bmatrix}$$

sehingga sistem persamaan homogen yang diperoleh adalah

$$B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \boldsymbol{\varepsilon},$$

$$B \otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0^{(3)},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5^{\nu} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0^{(3)},$$

yang ekuivalen dengan

$$5 \otimes v_1 \oplus 2 \otimes v_2 \oplus \varepsilon \otimes v_3 \in \mathcal{G}_0,$$

$$\varepsilon \otimes v_1 \oplus 5 \otimes v_2 \oplus 4 \otimes v_3 \in \mathcal{G}_0,$$

$$\varepsilon \otimes v_1 \oplus \varepsilon \otimes v_2 \oplus 5^{\nu} \otimes v_3 \in \mathcal{G}_0.$$

Dengan menggunakan penyelesaian sistem persamaan homogen diperoleh $adj(B) = \begin{bmatrix} 10^{\nu} & 7^{\nu} & 6 \\ \varepsilon & 10^{\nu} & 9 \\ \varepsilon & \varepsilon & 10 \end{bmatrix}$, maka solusi sistem persamaan homogen $B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \varepsilon$ adalah $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 10^{\nu} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7^{\nu} \\ 10^{\nu} \\ \varepsilon \end{bmatrix}$, dan $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}$. Selanjutnya diselidiki apakah $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 10^{\nu} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7^{\nu} \\ 10^{\nu} \\ \varepsilon \end{bmatrix}$, dan $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}$ adalah vektor-vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen $\lambda_1 = 5$, hal ini dapat ditunjukkan dengan

1. untuk $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 10^{\nu} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ memenuhi

$$C \otimes \boldsymbol{v_1} \not\models_{gs} \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_1}$$

sebab nilai $C \otimes \boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 10^{\nu} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11^{\nu} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ dan $\lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_1} = 5 \otimes \begin{bmatrix} 10^{\nu} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15^{\nu} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$, dapat dilihat bahwa $\begin{bmatrix} 11^{\nu} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \ngeq_{\nu} \begin{bmatrix} 15^{\nu} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ sehingga tidak dapat ditemukan suatu vektor $\boldsymbol{u_1}$ yang dapat memenuhi $C \otimes \boldsymbol{v_1} = \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_1} \oplus \boldsymbol{u_1}$, akan tetapi $C \otimes \boldsymbol{v_1} \oplus \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_1} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ terpenuhi yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 10^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus 5 \otimes \begin{bmatrix} 10^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 15^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

2. untuk $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7^v \\ 10^v \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ memenuhi

$$C \otimes \boldsymbol{v_2} \nvDash_{gs} \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_2},$$

sebab nilai $C \otimes \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7^v \\ 10^v \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12^v \\ 13^v \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ dan $\lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_2} = 5 \otimes \begin{bmatrix} 7^v \\ 10^v \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12^v \\ 15^v \\ \varepsilon \end{bmatrix}$, dapat dilihat bahwa $\begin{bmatrix} 12^v \\ 13^v \\ \varepsilon \end{bmatrix} \ngeq_v \begin{bmatrix} 12^v \\ 15^v \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ sehingga tidak dapat ditemukan suatu vektor $\boldsymbol{u_2}$ yang dapat memenuhi $C \otimes \boldsymbol{v_2} = \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_2} \oplus \boldsymbol{u_2}$, akan tetapi $C \otimes \boldsymbol{v_2} \oplus \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_2} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ terpenuhi yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7^v \\ 10^v \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus 5 \otimes \begin{bmatrix} 7^v \\ 10^v \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12^v \\ 13^v \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 12^v \\ 15^v \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12^v \\ 15^v \\ \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

3. untuk $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}$ memenuhi

$$C \otimes \boldsymbol{v_3} \vDash_{gs} \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix} = 5 \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix},$$

$$C \otimes \boldsymbol{v_3} = \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_3} \oplus \boldsymbol{u_3},$$

dan juga diperoleh bahwa $C \otimes \boldsymbol{v_3} \oplus \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_3} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix} \oplus 5 \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 11 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11^v \\ 14^v \\ 15^v \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

Berdasarkan perhitungan di atas, maka vektor $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 10^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7^v \\ 10^v \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ adalah *weak generalized supertropical eigenvector* yang terkait dengan *weak generalized* *supertropical eigenvalue* $\lambda_1 = 5$. Sedangkan $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen *supertropical* yang bersesuaian dengan nilai eigen *supertropical* $\lambda_1 = 5$.

Selanjutnya dengan cara yang sama bentuk matriks B untuk nilai eigen $\lambda_2 = 3$ yaitu

$$B = (\lambda \otimes I \oplus C) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3^{\nu} & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix}$$

sehingga sistem persamaan homogen yang diperoleh yaitu

$$B \otimes \boldsymbol{v} \vDash \boldsymbol{\varepsilon},$$

$$B \otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0^{(3)},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3^{\nu} & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)},$$

yang ekuivalen dengan

$$3 \otimes v_1 \oplus 2 \otimes v_2 \oplus \varepsilon \otimes v_3 \in \mathcal{G}_0,$$

$$\varepsilon \otimes v_1 \oplus 3^{\nu} \otimes v_2 \oplus 4 \otimes v_3 \in \mathcal{G}_0,$$

$$\varepsilon \otimes v_1 \oplus \varepsilon \otimes v_2 \oplus 5 \otimes v_3 \in \mathcal{G}_0.$$

Dengan menggunakan penyelesaian sistem persamaan homogen diperoleh $adj(B) = \begin{bmatrix} 8^{\nu} & 7 & 6 \\ \varepsilon & 8 & 7 \\ \varepsilon & \varepsilon & 6^{\nu} \end{bmatrix}$, maka penyelesaian sistem persamaan homogen $B \otimes \boldsymbol{v} \vDash \boldsymbol{\varepsilon}$ adalah $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 8^{\nu} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$, dan $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6^{\nu} \end{bmatrix}$. Selanjutnya diselidiki apakah vektor-vektor $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$, dan $\boldsymbol{v_3}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_2 = 3$, hal ini dapat ditunjukkan dengan

1. untuk $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 8^{\nu} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ memenuhi

$$C \otimes \boldsymbol{v_1} \vDash \lambda_2 \otimes \boldsymbol{v_1},$$

sebab nilai $C \otimes \boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ dan nilai $\lambda_2 \otimes \boldsymbol{v_1} = 3 \otimes \begin{bmatrix} 8^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ dapat dilihat bahwa $\begin{bmatrix} 9^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \not\succeq_v \begin{bmatrix} 11^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ sehingga tidak dapat ditemukan suatu vektor $\boldsymbol{u_1}$ yang dapat memenuhi $C \otimes \boldsymbol{v_1} = \lambda_2 \otimes \boldsymbol{v_1} \oplus \boldsymbol{u_1}$, akan tetapi $C \otimes \boldsymbol{v_1} \oplus \lambda_2 \otimes \boldsymbol{v_1} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ terpenuhi yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus 3 \otimes \begin{bmatrix} 8^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 11^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

2. untuk $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ memenuhi

$$C \otimes \boldsymbol{v_2} \vDash_{gs} \lambda_2 \otimes \boldsymbol{v_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 3 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$C \otimes \boldsymbol{v_2} = \lambda_2 \otimes \boldsymbol{v_2} \oplus \boldsymbol{u_2},$$

dan juga diperoleh bahwa $A \otimes \boldsymbol{v_2} \oplus \lambda_2 \otimes \boldsymbol{v_2} \oplus \boldsymbol{u_2} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus 3 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^v \\ 11^v \\ \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

3. untuk $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6^v \end{bmatrix}$ memenuhi

$$C \otimes \boldsymbol{v_3} \vDash \lambda_2 \otimes \boldsymbol{v_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 10^v \\ 11^v \end{bmatrix} = 3 \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6^v \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 10^v \\ 11^v \end{bmatrix}$$

$$C \otimes \boldsymbol{v_3} = \lambda_2 \otimes \boldsymbol{v_3} \oplus \boldsymbol{u_3}$$

dan juga diperoleh bahwa $C \otimes \boldsymbol{v_3} \oplus \lambda_2 \otimes \boldsymbol{v_3} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6^v \end{bmatrix} \oplus 3 \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 10^v \\ 11^v \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 9^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9^v \\ 10^v \\ 11^v \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

Berdasarkan perhitungan tersebut maka vektor-vektor $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 8^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6^{v} \end{bmatrix}$ adalah *weak generalized supertropical eigenvector* yang terkait dengan *weak generalized supertropical eigenvalue* $\lambda_2 = 3$, sedangkan vektor $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen *supertropical* yang terkait dengan nilai eigen *supertropical* $\lambda_2 = 3$.

Dengan cara yang sama selanjutnya matriks B untuk nilai eigen $\lambda_3 = 1$ diperoleh

$$B = (\lambda \otimes I \oplus C) = \begin{bmatrix} 1^{v} & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix}$$

sehingga sistem persamaan homogen yang diperoleh yaitu

$$B \otimes \boldsymbol{v} \vDash \boldsymbol{\varepsilon},$$

$$B \otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0^{(3)},$$

$$\begin{bmatrix} 1^{v} & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0^{(3)},$$

yang ekuivalen dengan

$$1^{v} \otimes v_1 \oplus 2 \otimes v_2 \oplus \varepsilon \otimes v_3 \in \mathcal{G}_0,$$

$$\varepsilon \otimes v_1 \oplus 3 \otimes v_2 \oplus 4 \otimes v_3 \in \mathcal{G}_0,$$

$$\varepsilon \otimes v_1 \oplus \varepsilon \otimes v_2 \oplus 5 \otimes v_3 \in \mathcal{G}_0.$$

Dengan menggunakan penyelesaian sistem persamaan homogen diperoleh $adj(B) = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 6 \\ \varepsilon & 6^{v} & 5^{v} \\ \varepsilon & \varepsilon & 4^{v} \end{bmatrix}$, maka penyelesaian sistem persamaan homogen $B \otimes \boldsymbol{v} \vDash \varepsilon$ adalah $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6^{v} \\ \varepsilon \end{bmatrix}$, dan $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5^{v} \\ 4^{v} \end{bmatrix}$. Selanjutnya diselidiki apakah vektor-vektor $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$, dan $\boldsymbol{v_3}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian untuk nilai eigen $\lambda_3 = 1$, hal ini dapat ditunjukkan dengan

1. untuk $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ memenuhi

$$C \otimes \boldsymbol{v_1} \vDash \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_1} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$C \otimes \boldsymbol{v_1} = \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_1} \oplus \boldsymbol{u_1}$$

dan juga diperoleh bahwa $C \otimes \boldsymbol{v_1} \oplus \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_1} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus 1 \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9^{\nu} \\ \varepsilon^{\nu} \\ \varepsilon^{\nu} \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

2. untuk $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6^{\nu} \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ memenuhi

$$C \otimes \boldsymbol{v_2} \vDash \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 6^{\nu} \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8^{\nu} \\ 9^{\nu} \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 6^{\nu} \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 8^{\nu} \\ 9^{\nu} \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$C \otimes \boldsymbol{v_2} = \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_2} \oplus \boldsymbol{u_2}$$

dan juga diperoleh bahwa $C \otimes \boldsymbol{v_2} \oplus \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_2} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 6^{\nu} \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus 1 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 6^{\nu} \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8^{\nu} \\ 9^{\nu} \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 8 \\ 7^{\nu} \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8^{\nu} \\ 9^{\nu} \\ \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

3. untuk $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5^{\nu} \\ 4^{\nu} \end{bmatrix}$ memenuhi

$$C \otimes \boldsymbol{v_3} \vDash \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 5^{\nu} \\ 4^{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7^{\nu} \\ 8^{\nu} \\ 9^{\nu} \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 5^{\nu} \\ 4^{\nu} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 7^{\nu} \\ 8^{\nu} \\ 9^{\nu} \end{bmatrix}$$

$$C \otimes \boldsymbol{v_3} = \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_3} \oplus \boldsymbol{u_3}$$

dan juga diperoleh bahwa $C \otimes \boldsymbol{v_3} \oplus \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_3} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 5^{\nu} \\ 4^{\nu} \end{bmatrix} \oplus 1 \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 5^{\nu} \\ 4^{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7^{\nu} \\ 8^{\nu} \\ 9^{\nu} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 7 \\ 6^{\nu} \\ 5^{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7^{\nu} \\ 8^{\nu} \\ 9^{\nu} \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

Berdasarkan perhitungan tersebut, maka vektor-vektor $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6^v \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5^v \\ 4^v \end{bmatrix}$ adalah *weak generalized supertropical eigenvector* yang terkait dengan *weak generalized supertropical eigenvalue* $\lambda_3 = 1$, sedangkan vektor $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen *supertropical* yang terkait dengan nilai eigen *supertropical* $\lambda_3 = 1$.

□

Contoh 4.1.5 (Kasus 3)

Diberikan semiring *supertropical* $\mathcal{R} = (R, \mathcal{G}_0, v)$ dengan R adalah semiring $(T, \oplus, \otimes)$ dimana $T = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^v \cup \{-\infty\}$ dan $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathcal{R})$ adalah matriks atas semiring $\mathcal{R}$. Nilai eigen dari matriks *D* dicari dengan cara yang sama seperti pada **Contoh 4.1.3** yaitu dengan penyelesaian persamaan karakteristik sebagai berikut

$$|\lambda \otimes I \oplus D| \in \mathcal{G}_0$$

$$\left| \lambda \otimes \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \right| \in \mathcal{G}_0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \lambda & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \lambda \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \right| \in \mathcal{G}_0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda \oplus 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & \lambda \oplus 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \lambda \oplus 5 \end{bmatrix} \right| \in \mathcal{G}_0$$

sehingga diperoleh persamaan karakteristik yang sama yaitu

$$\lambda^3 \oplus \lambda^2 \otimes 5 \oplus \lambda \otimes 8 \oplus 9 \in \mathcal{G}_0$$

dan nilai eigen $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3$, dan $\lambda_3 = 1$. Selanjutnya dicari vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_1, λ_2 dan λ_3 dengan mencari penyelesaian sistem persamaan homogen $B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \varepsilon \Rightarrow B \otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0^{(3)}$.

Matriks *B* untuk nilai eigen $\lambda_1 = 5$ diberikan oleh

$$B = (\lambda \otimes I \oplus D) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5^{v} \end{bmatrix},$$

dan sistem persamaan homogen $B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \boldsymbol{\varepsilon}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5^{v} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

Dengan menggunakan penyelesaian sistem persamaan homogen diperoleh $adj(B) = \begin{bmatrix} 10^{v} & 7^{v} & 9 \\ \varepsilon & 10^{v} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 10 \end{bmatrix}$, maka solusi sistem persamaan homogen $B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \boldsymbol{\varepsilon}$ adalah

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 10^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7^{v} \\ 10^{v} \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Diperiksa untuk masing-masing vektor $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$, dan $\boldsymbol{v_3}$ yaitu

1. untuk $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 10^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ memenuhi

$$D \otimes \boldsymbol{v_1} \not\models_{gs} \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_1},$$

sebab nilai $D \otimes \boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 10^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ dan $\lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_1} = 5 \otimes \begin{bmatrix} 10^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$, dapat dilihat bahwa $\begin{bmatrix} 11^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \ngeq_{v} \begin{bmatrix} 15^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ sehingga tidak dapat diperoleh vektor $\boldsymbol{u_1}$ yang memenuhi $D \otimes \boldsymbol{v_1} = \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_1} \oplus \boldsymbol{v_1}$, akan tetapi $D \otimes \boldsymbol{v_1} \oplus \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_1} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ terpenuhi yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 10^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus 5 \otimes \begin{bmatrix} 10^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 15^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

2. untuk $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7^{v} \\ 10^{v} \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ memenuhi

$$D \otimes \boldsymbol{v_2} \not\models_{gs} \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_2},$$

sebab nilai $D \otimes \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ \varepsilon & 3 & \varepsilon\\ \varepsilon & \varepsilon & 5\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}7^v\\ 10^v\\ \varepsilon\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12^v\\ 13^v\\ \varepsilon\end{bmatrix}$ dan $\lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_2} = 5 \otimes \begin{bmatrix}7^v\\ 10^v\\ \varepsilon\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12^v\\ 15^v\\ \varepsilon\end{bmatrix}$, dapat dilihat bahwa $\begin{bmatrix}12^v\\ 13^v\\ \varepsilon\end{bmatrix} \not\succeq_v \begin{bmatrix}12^v\\ 15^v\\ \varepsilon\end{bmatrix}$ sehingga tidak dapat diperoleh vektor $\boldsymbol{u_2}$ yang memenuhi $D \otimes \boldsymbol{v_2} = \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_2} \oplus \boldsymbol{v_2}$, akan tetapi $D \otimes \boldsymbol{v_2} \oplus \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_2} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ terpenuhi yaitu

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ \varepsilon & 3 & \varepsilon\\ \varepsilon & \varepsilon & 5\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}7^v\\ 10^v\\ \varepsilon\end{bmatrix} \oplus 5 \otimes \begin{bmatrix}7^v\\ 10^v\\ \varepsilon\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12^v\\ 13^v\\ \varepsilon\end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix}12^v\\ 15^v\\ \varepsilon\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12^v\\ 15^v\\ \varepsilon\end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

3. untuk $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix}9\\ \varepsilon\\ 10\end{bmatrix}$ memenuhi

$$D \otimes \boldsymbol{v_3} \models_{gs} \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_3},$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ \varepsilon & 3 & \varepsilon\\ \varepsilon & \varepsilon & 5\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}9\\ \varepsilon\\ 10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}14\\ \varepsilon\\ 15\end{bmatrix} = 5 \otimes \begin{bmatrix}9\\ \varepsilon\\ 10\end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon\\ \varepsilon\end{bmatrix}$$

$$D \otimes \boldsymbol{v_3} = \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_3} \oplus \boldsymbol{v_3}$$

dan juga diperoleh bahwa $D \otimes \boldsymbol{v_3} \oplus \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_3} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ \varepsilon & 3 & \varepsilon\\ \varepsilon & \varepsilon & 5\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}9\\ \varepsilon\\ 10\end{bmatrix} \oplus 5 \otimes \begin{bmatrix}9\\ \varepsilon\\ 10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}14\\ \varepsilon\\ 15\end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix}14\\ \varepsilon\\ 15\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}14^v\\ \varepsilon\\ 15^v\end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

Berdasarkan penjelasan di atas, maka vektor $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix}10^v\\ \varepsilon\\ \varepsilon\end{bmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix}7^v\\ 10^v\\ \varepsilon\end{bmatrix}$ adalah *weak generalized supertropical eigenvector* yang terkait dengan *weak generalized suopertropical eigenvalue* $\lambda_1 = 5$, sedangkan vektor $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix}9\\ \varepsilon\\ 10\end{bmatrix}$ adalah vektor eigen *supertropical* yang terkait dengan nilai eigen *supertropical* $\lambda_1 = 5$.

Dengan cara yang sama, matriks B untuk nilai eigen $\lambda_2 = 3$ diberikan oleh

$$B = (\lambda \otimes I \oplus D) = \begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ \varepsilon & 3^v & \varepsilon\\ \varepsilon & \varepsilon & 5\end{bmatrix},$$

dan sistem persamaan homogen $B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \boldsymbol{\varepsilon}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3^v & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

Dengan menggunakan penyelesaian sistem persamaan homogen diperoleh $adj(B) = \begin{bmatrix} 8^v & 7 & 7^v \\ \varepsilon & 8 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 6^v \end{bmatrix}$, maka solusi persamaan homogen $B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \varepsilon$ adalah

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 8^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 7^v \\ \varepsilon \\ 6^v \end{bmatrix}.$$

Diperiksa untuk masing-masing vektor $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$, dan $\boldsymbol{v_3}$ yaitu

1. untuk $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 8^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ memenuhi

   $$D \otimes \boldsymbol{u_1} \not\models_{gs} \lambda_2 \otimes \boldsymbol{u_1},$$

   sebab nilai $D \otimes \boldsymbol{u_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ dan $\lambda_2 \otimes \boldsymbol{u_1} = 3 \otimes \begin{bmatrix} 8^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$, dapat dilihat bahwa $\begin{bmatrix} 9^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \not\succeq_v \begin{bmatrix} 11^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ sehingga tidak dapat diperoleh vektor $\boldsymbol{u_1}$ yang memenuhi $D \otimes \boldsymbol{u_1} = \lambda_2 \otimes \boldsymbol{u_1} \oplus \boldsymbol{u_1}$, akan tetapi $D \otimes \boldsymbol{u_1} \oplus \lambda_2 \otimes \boldsymbol{u_1} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ terpenuhi yaitu

   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus 3 \otimes \begin{bmatrix} 8^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 11^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11^v \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

2. untuk $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ memenuhi

   $$D \otimes \boldsymbol{u_2} \models_{gs} \lambda_2 \otimes \boldsymbol{u_2}$$

   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 3 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

   $$D \otimes \boldsymbol{u_2} = \lambda_2 \otimes \boldsymbol{u_2} \oplus \boldsymbol{u_2}$$

   dan juga diperoleh bahwa $D \otimes \boldsymbol{u_2} \oplus \lambda_2 \otimes \boldsymbol{u_2} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ \varepsilon & 3 & \varepsilon\\ \varepsilon & \varepsilon & 5\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}7\\ 8\\ \varepsilon\end{bmatrix} \oplus 3 \otimes \begin{bmatrix}7\\ 8\\ \varepsilon\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\ 11\\ \varepsilon\end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix}10\\ 11\\ \varepsilon\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10^{v}\\ 11^{v}\\ \varepsilon\end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

3. untuk $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix}7^{v}\\ \varepsilon\\ 6^{v}\end{bmatrix}$ memenuhi

$$D \otimes \boldsymbol{v_3} \vDash_{gs} \lambda_2 \otimes \boldsymbol{v_3}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ \varepsilon & 3 & \varepsilon\\ \varepsilon & \varepsilon & 5\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}7^{v}\\ \varepsilon\\ 6^{v}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10^{v}\\ \varepsilon\\ 11^{v}\end{bmatrix} = 3 \otimes \begin{bmatrix}7^{v}\\ \varepsilon\\ 6^{v}\end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon\\ 11^{v}\end{bmatrix}$$

$$D \otimes \boldsymbol{v_3} = \lambda_2 \otimes \boldsymbol{v_3} \oplus \boldsymbol{v_3}$$

dan juga diperoleh bahwa $D \otimes \boldsymbol{v_3} \oplus \lambda_2 \otimes \boldsymbol{v_3} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ \varepsilon & 3 & \varepsilon\\ \varepsilon & \varepsilon & 5\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}7^{v}\\ \varepsilon\\ 6^{v}\end{bmatrix} \oplus 3 \otimes \begin{bmatrix}7^{v}\\ \varepsilon\\ 6^{v}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10^{v}\\ \varepsilon\\ 11^{v}\end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix}10^{v}\\ \varepsilon\\ 9^{v}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10^{v}\\ \varepsilon\\ 11^{v}\end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

Berdasarkan penjelasan di atas, maka vektor $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix}8^{v}\\ \varepsilon\\ \varepsilon\end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix}7^{v}\\ \varepsilon\\ 6^{v}\end{bmatrix}$ adalah *weak generalized supertropical eigenvector* yang terkait *dengan weak generalized supertropical eigenvalue* $\lambda_2 = 3$, sedangkan vektor $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix}7\\ 8\\ \varepsilon\end{bmatrix}$ adalah vektor eigen *supertropical* yang terkait dengan nilai eigen *supertropical* $\lambda_2 = 3$.

Dengan cara yang sama, matriks B untuk nilai eigen $\lambda_3 = 1$ diberikan oleh

$$B = (\lambda \otimes I \oplus D) = \begin{bmatrix}1^{v} & 2 & 4\\ \varepsilon & 3 & \varepsilon\\ \varepsilon & \varepsilon & 5\end{bmatrix},$$

dan sistem persamaan homogen $B \otimes \boldsymbol{v} \vDash_{gs} \boldsymbol{\varepsilon}$ yaitu

$$\begin{bmatrix}1^{v} & 2 & 4\\ \varepsilon & 3 & \varepsilon\\ \varepsilon & \varepsilon & 5\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

Dengan menggunakan penyelesaian sistem persamaan homogen diperoleh $adj(B) = \begin{bmatrix}8 & 7 & 7\\ \varepsilon & 6^{v} & \varepsilon\\ \varepsilon & \varepsilon & 4^{v}\end{bmatrix}$, maka solusi persamaan homogen $B \otimes \boldsymbol{v} \vDash_{gs} \boldsymbol{\varepsilon}$ adalah

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6^{v} \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 7 \\ \varepsilon \\ 4^{v} \end{bmatrix}.$$

Diperiksa untuk masing-masing vektor $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$, dan $\boldsymbol{v_3}$ yaitu

1. untuk $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ memenuhi

$$D \otimes \boldsymbol{v_1} \vDash_{gs} \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$D \otimes \boldsymbol{v_1} = \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_1} \oplus \boldsymbol{u_1}$$

dan juga diperoleh bahwa $D \otimes \boldsymbol{v_1} \oplus \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_1} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus 1 \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

2. untuk $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6^{v} \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ memenuhi

$$D \otimes \boldsymbol{v_2} \vDash_{gs} \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 6^{v} \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8^{v} \\ 9^{v} \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 6^{v} \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 8^{v} \\ 9^{v} \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$D \otimes \boldsymbol{v_2} = \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_2} \oplus \boldsymbol{u_2}$$

dan juga diperoleh bahwa $D \otimes \boldsymbol{v_2} \oplus \lambda_2 \otimes \boldsymbol{v_2} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 6^{v} \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus 1 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 6^{v} \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8^{v} \\ 9^{v} \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 8 \\ 7^{v} \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8^{v} \\ 9^{v} \\ \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

3. untuk $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 7 \\ \varepsilon \\ 4^{v} \end{bmatrix}$ memenuhi

$$D \otimes \boldsymbol{v_3} \vDash_{gs} \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ \varepsilon \\ 4^{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8^{v} \\ \varepsilon \\ 9^{v} \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ \varepsilon \\ 4^{v} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 8^{v} \\ \varepsilon \\ 9^{v} \end{bmatrix}$$

$$D \otimes \boldsymbol{v_3} = \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_3} \oplus \boldsymbol{u_3}$$

dan juga diperoleh bahwa $D \otimes \boldsymbol{v_3} \oplus \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_3} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ \varepsilon \\ 4^v \end{bmatrix} \oplus 1 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ \varepsilon \\ 4^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8^v \\ \varepsilon \\ 9^v \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ 5^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8^v \\ \varepsilon \\ 9^v \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

Berdasarkan penjelasan di atas, maka vektor $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6^v \\ \varepsilon \end{bmatrix}$, dan $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 7 \\ \varepsilon \\ 4^v \end{bmatrix}$ adalah *weak generalized supertropical eigenvector* yang terkait dengan *weak generalized supertropical eigenvalue* $\lambda_3 = 1$, sedangkan $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen *supertropical* yang terkait dengan nilai eigen *supertropical* $\lambda_3 = 1$.

□

Contoh 4.1.6 (Kasus 4)

Diberikan semiring *supertropical* $\mathcal{R} = (R, \mathcal{G}_0, v)$ dengan R adalah semiring $(T, \oplus, \otimes)$ dimana $T = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^v \cup \{-\infty\}$ dan $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathcal{R})$ adalah matriks atas semiring $\mathcal{R}$. Nilai eigen dari matriks E dicari dengan cara yang sama seperti pada **Contoh 4.1.3** yaitu dengan penyelesaian persamaan karakteristik sebagai berikut

$$|\lambda \otimes I \oplus D| \in \mathcal{G}_0$$

$$\left| \lambda \otimes \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \right| \in \mathcal{G}_0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \lambda & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \lambda \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \right| \in \mathcal{G}_0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda \oplus 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \lambda \oplus 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & \lambda \oplus 5 \end{bmatrix} \right| \in \mathcal{G}_0$$

sehingga diperoleh persamaan karakteristik yang sama yaitu

$$\lambda^3 \oplus \lambda^2 \otimes 5 \oplus \lambda \otimes 8 \oplus 9 \in \mathcal{G}_0$$

dan nilai eigen $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3$, dan $\lambda_3 = 1$. Selanjutnya dicari vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_1, λ_2 dan λ_3 dengan mencari penyelesaian sistem persamaan homogen $B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow B \otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0^{(3)}$.

Matriks B untuk nilai eigen $\lambda_1 = 5$ diberikan oleh

$$B = (\lambda \otimes I \oplus E) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5^v \end{bmatrix},$$

dan sistem persamaan homogen $B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \boldsymbol{\varepsilon}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5^v \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0^{(3)}.$$

Dengan menggunakan penyelesaian sistem persamaan homogen diperoleh $adj(B) = \begin{bmatrix} 10^v & 7^v & \varepsilon \\ \varepsilon & 10^v & \varepsilon \\ 9 & 6 & 10 \end{bmatrix}$, maka solusi persamaan homogen $B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \boldsymbol{\varepsilon}$ adalah

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 10^v \\ \varepsilon \\ 9 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7^v \\ 10^v \\ 6 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Diperiksa untuk masing-masing vektor $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$, dan $\boldsymbol{v_3}$ yaitu

1. untuk $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 10^v \\ \varepsilon \\ 9 \end{bmatrix}$ memenuhi

$$E \otimes \boldsymbol{u} \not\models_{gs} \lambda_1 \otimes \boldsymbol{u},$$

sebab nilai $E \otimes \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 10^v \\ \varepsilon \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11^v \\ \varepsilon \\ 14^v \end{bmatrix}$ dan $\lambda_1 \otimes \boldsymbol{u} = 5 \otimes \begin{bmatrix} 10^v \\ \varepsilon \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15^v \\ \varepsilon \\ 14 \end{bmatrix}$, dapat dilihat bahwa $\begin{bmatrix} 11^v \\ \varepsilon \\ 14^v \end{bmatrix} \not\succeq_v \begin{bmatrix} 15^v \\ \varepsilon \\ 14 \end{bmatrix}$ sehingga tidak dapat diperoleh vektor $\boldsymbol{u_1}$ yang memenuhi $E \otimes \boldsymbol{u} = \lambda_1 \otimes \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{u}$, akan tetapi $E \otimes \boldsymbol{u} \oplus \lambda_1 \otimes \boldsymbol{u} \in \mathcal{G}_0^{(3)}$ terpenuhi, yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 10^v \\ \varepsilon \\ 9 \end{bmatrix} \oplus 5 \otimes \begin{bmatrix} 10^v \\ \varepsilon \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11^v \\ \varepsilon \\ 14^v \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 15^v \\ \varepsilon \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15^v \\ \varepsilon \\ 14^v \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0^{(3)}.$$

2. untuk $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7^\nu \\ 10^\nu \\ 6 \end{bmatrix}$ memenuhi

$$E \otimes \boldsymbol{v_2} \nvDash_{gs} \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_2},$$

sebab nilai $E \otimes \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7^\nu \\ 10^\nu \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12^\nu \\ 13^\nu \\ 11^\nu \end{bmatrix}$ dan $\lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_2} = 5 \otimes \begin{bmatrix} 7^\nu \\ 10^\nu \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12^\nu \\ 15^\nu \\ 11 \end{bmatrix}$, dapat dilihat bahwa $\begin{bmatrix} 12^\nu \\ 13^\nu \\ 11^\nu \end{bmatrix} \not\succeq_\nu \begin{bmatrix} 12^\nu \\ 15^\nu \\ 11 \end{bmatrix}$ sehingga tidak dapat diperoleh vektor $\boldsymbol{u_2}$ yang memenuhi $E \otimes \boldsymbol{v_2} = \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_2} \oplus \boldsymbol{u_2}$, akan tetapi $E \otimes \boldsymbol{v_2} \oplus \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_2} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ terpenuhi, yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7^\nu \\ 10^\nu \\ 6 \end{bmatrix} \oplus 5 \otimes \begin{bmatrix} 7^\nu \\ 10^\nu \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12^\nu \\ 13^\nu \\ 11^\nu \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 12^\nu \\ 15^\nu \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12^\nu \\ 15^\nu \\ 11^\nu \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

3. untuk $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix}$ memenuhi

$$E \otimes \boldsymbol{v_3} \vDash_{gs} \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_3},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 15 \end{bmatrix} = 5 \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$E \otimes \boldsymbol{v_3} = \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_3} \oplus \boldsymbol{u_3}$$

dan juga diperoleh bahwa $E \otimes \boldsymbol{v_3} \oplus \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_3} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix} \oplus 5 \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 15 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 15^\nu \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

Berdasarkan penjelasan di atas, maka vektor $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 10^\nu \\ \varepsilon \\ 9 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7^\nu \\ 10^\nu \\ 6 \end{bmatrix}$ adalah *weak generalized supertropical eigenvector* yang terkait dengan *weak generalized supertropical eigenvalue* $\lambda_1 = 5$, sedangkan vektor $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen *supertropical* yang terkait dengan nilai eigen *supertropical* $\lambda_1 = 5$.

Dengan cara yang sama, matriks B untuk nilai eigen $\lambda_2 = 3$ diberikan oleh

$$B=(\lambda\otimes I\oplus E)=\begin{bmatrix}3 & 2 & \varepsilon\\ \varepsilon & 3^{v} & \varepsilon\\ 4 & \varepsilon & 5\end{bmatrix},$$

dan sistem persamaan homogen $B\otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \boldsymbol{\varepsilon}$ yaitu

$$\begin{bmatrix}3 & 2 & \varepsilon\\ \varepsilon & 3^{v} & \varepsilon\\ 4 & \varepsilon & 5\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}\in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

Dengan menggunakan penyelesaian sistem persamaan homogen diperoleh $adj(B)=$ $\begin{bmatrix}8^{v} & 7 & \varepsilon\\ \varepsilon & 8 & \varepsilon\\ 7^{v} & 6 & 6^{v}\end{bmatrix}$, maka solusi persamaan homogen $B\otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \boldsymbol{\varepsilon}$ adalah

$$\boldsymbol{v_1}=\begin{bmatrix}8^{v}\\ \varepsilon\\ 7^{v}\end{bmatrix},\boldsymbol{v_2}=\begin{bmatrix}7\\ 8\\ 6\end{bmatrix},\boldsymbol{v_3}=\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon\\ 6^{v}\end{bmatrix}.$$

Diperiksa untuk masing-masing vektor $\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2}$, dan $\boldsymbol{v_3}$ yaitu

1. untuk $\boldsymbol{v_1}=\begin{bmatrix}8^{v}\\ \varepsilon\\ 7^{v}\end{bmatrix}$ memenuhi

$$E\otimes \boldsymbol{v_1} \not\models_{gs} \lambda_2\otimes \boldsymbol{v_1},$$

sebab nilai $E\otimes \boldsymbol{v_1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & \varepsilon\\ \varepsilon & 3 & \varepsilon\\ 4 & \varepsilon & 5\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}8^{v}\\ \varepsilon\\ 7^{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9^{v}\\ \varepsilon\\ 12^{v}\end{bmatrix}$ dan $\lambda_2\otimes \boldsymbol{v_1}=3\otimes$ $\begin{bmatrix}8^{v}\\ \varepsilon\\ 7^{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11^{v}\\ \varepsilon\\ 10^{v}\end{bmatrix}$, dapat dilihat bahwa $\begin{bmatrix}9^{v}\\ \varepsilon\\ 12^{v}\end{bmatrix}\ngeq_{v}\begin{bmatrix}11^{v}\\ \varepsilon\\ 10^{v}\end{bmatrix}$ sehingga tidak dapat diperoleh vektor $\boldsymbol{u_1}$ yang memenuhi $E\otimes \boldsymbol{v_1}=\lambda_2\otimes \boldsymbol{v_1}\oplus \boldsymbol{u_1}$, akan tetapi $E\otimes \boldsymbol{v_1}\oplus \lambda_2\otimes \boldsymbol{v_1}\in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ berlaku, yaitu

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & \varepsilon\\ \varepsilon & 3 & \varepsilon\\ 4 & \varepsilon & 5\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}8^{v}\\ \varepsilon\\ 7^{v}\end{bmatrix}\oplus 3\otimes\begin{bmatrix}8^{v}\\ \varepsilon\\ 7^{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9^{v}\\ \varepsilon\\ 12^{v}\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}11^{v}\\ \varepsilon\\ 10^{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11^{v}\\ \varepsilon\\ 12^{v}\end{bmatrix}\in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

2. untuk $\boldsymbol{v_2}=\begin{bmatrix}7\\ 8\\ 6\end{bmatrix}$ memenuhi

$$E\otimes \boldsymbol{v_2} \models_{gs} \lambda_2\otimes \boldsymbol{v_2}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & \varepsilon\\ \varepsilon & 3 & \varepsilon\\ 4 & \varepsilon & 5\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}7\\ 8\\ 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 11\\ 11^{v}\end{bmatrix}=3\otimes\begin{bmatrix}7\\ 8\\ 6\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon\\ 11^{v}\end{bmatrix}$$

$$E \otimes v_2 = \lambda_2 \otimes v_2 \oplus v_2$$

dan juga diperoleh bahwa $D \otimes v_2 \oplus \lambda_2 \otimes v_2 \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} \oplus 3 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 11^{\nu} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{\nu} \\ 11^{\nu} \\ 11^{\nu} \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

3. untuk $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 6^{\nu} \end{bmatrix}$ memenuhi

$$E \otimes v_3 \models_{gs} \lambda_2 \otimes v_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 6^{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 11^{\nu} \end{bmatrix} = 3 \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 6^{\nu} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 11^{\nu} \end{bmatrix}$$

$$E \otimes v_3 = \lambda_2 \otimes v_3 \oplus v_3$$

dan juga diperoleh bahwa $E \otimes v_3 \oplus \lambda_2 \otimes v_3 \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 6^{\nu} \end{bmatrix} \oplus 3 \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 6^{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 11^{\nu} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 9^{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 11^{\nu} \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

Berdasarkan penjelasan di atas, maka vektor $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 8^{\nu} \\ \varepsilon \\ 7^{\nu} \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 6^{\nu} \end{bmatrix}$ adalah *weak generalized supertropical eigenvector* yang terkait dengan *weak generalized supertropical eigenvalue* $\lambda_2 = 3$, sedangkan $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen *supertropical* yang terkait dengan nilai eigen *supertropical* $\lambda_2 = 3$.

Dengan cara yang sama, matriks B untuk nilai eigen $\lambda_3 = 1$ diberikan oleh

$$B = (\lambda \otimes I \oplus E) = \begin{bmatrix} 1^{\nu} & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix},$$

dan sistem persamaan homogen $B \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \boldsymbol{\varepsilon}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 1^{\nu} & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

Dengan menggunakan penyelesaian sistem persamaan homogen diperoleh $adj(B) = \begin{bmatrix} 8 & 7 & \varepsilon \\ \varepsilon & 6^{v} & \varepsilon \\ 7 & 6 & 4^{v} \end{bmatrix}$, maka solusi persamaan homogen $B \otimes \boldsymbol{v} \vDash_{gs} \boldsymbol{\varepsilon}$ adalah

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ 7 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6^{v} \\ 6 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 4^{v} \end{bmatrix}.$$

Diperiksa untuk masing-masing vektor $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$, dan $\boldsymbol{v_3}$ yaitu

1. untuk $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ 7 \end{bmatrix}$ memenuhi

$$E \otimes \boldsymbol{v_1} \vDash_{gs} \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ 12^{v} \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ 7 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 12^{v} \end{bmatrix}$$

$$E \otimes \boldsymbol{v_1} = \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_1} \oplus \boldsymbol{v_1}$$

dan juga diperoleh bahwa $E \otimes \boldsymbol{v_1} \oplus \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_1} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ 7 \end{bmatrix} \oplus 1 \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ 12^{v} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ 12^{v} \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

2. untuk $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6^{v} \\ 6 \end{bmatrix}$ memenuhi

$$E \otimes \boldsymbol{v_2} \vDash_{gs} \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 6^{v} \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8^{v} \\ 9^{v} \\ 11^{v} \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 6^{v} \\ 6 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 8^{v} \\ 9^{v} \\ 11^{v} \end{bmatrix}$$

$$E \otimes \boldsymbol{v_2} = \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_2} \oplus \boldsymbol{v_2}$$

dan juga diperoleh bahwa $E \otimes \boldsymbol{v_2} \oplus \lambda_2 \otimes \boldsymbol{v_2} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 6^{v} \\ 6 \end{bmatrix} \oplus 1 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 6^{v} \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8^{v} \\ 9^{v} \\ 11^{v} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 8 \\ 7^{v} \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8^{v} \\ 9^{v} \\ 11^{v} \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

3. untuk $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 4^{v} \end{bmatrix}$ memenuhi

$$E \otimes \boldsymbol{v_3} \vDash_{gs} \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 4^{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 9^{v} \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 4^{v} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 9^{v} \end{bmatrix}$$

$$E \otimes \boldsymbol{v_3} = \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_3} \oplus \boldsymbol{v_3}$$

dan juga diperoleh bahwa $E \otimes \boldsymbol{v_3} \oplus \lambda_3 \otimes \boldsymbol{v_3} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 4^{v} \end{bmatrix} \oplus 1 \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 4^{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 9^{v} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 5^{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 9^{v} \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0{}^{(3)}.$$

Berdasarkan penjelasan di atas, maka vektor $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6^{v} \\ 6 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 4^{v} \end{bmatrix}$ adalah *weak generalized supertropical eigenvector* yang terkait dengan *weak generalized supertropical eigenvalue* $\lambda_3 = 1$, sedangkan vektor $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ 7 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen *supertropical* yang terkait dengan nilai eigen *supertropical* $\lambda_3 = 1$.

$\square$

Berdasarkan perhitungan yang telah dikerjakan pada **Contoh 4.1.3**, **Contoh 4.1.4**, **Contoh 4.1.5**, dan **Contoh 4.1.6** maka $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, dan $\lambda_3 = 1$ ketiganya merupakan nilai-nilai eigen untuk matriks A dan memiliki vektor-vektor eigen yang tidak tunggal.

Hasil perhitungan *weak generalized supertropical eigenvalue*, nilai eigen *supertropical*, *weak generalized supertropical eigenvector*, dan vektor eigen *supertropical* pada **Contoh 4.1.3**, **Contoh 4.1.4**, **Contoh 4.1.5**, dan **Contoh 4.1.6** disajikan pada tabel berikut.

Tabel 4.1 Hasil perhitungan nilai eigen dan vektor eigen

Kasus	Nilai Eigen	*Weak Generalized Supertropical Eigenvector*	Vektor Eigen *Supertropical*
	5	$\begin{bmatrix} 10^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7^{v} \\ 10^{v} \\ 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix} (A \otimes \ \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \ )\boldsymbol{v}$
1	3	$\begin{bmatrix} 8^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 6^{v} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$
	1	$\begin{bmatrix} 7 \\ 6^{v} \\ 5^{v} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 4^{v} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} (A \otimes \ \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \ )\boldsymbol{v}$
	5	$\begin{bmatrix} 10^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7^{v} \\ 10^{v} \\ \varepsilon \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix} (A \otimes \ \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \ )\boldsymbol{v}$
2	3	$\begin{bmatrix} 8^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6^{v} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ \varepsilon \end{bmatrix} (A \otimes \ \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \ )\boldsymbol{v}$
	1	$\begin{bmatrix} 7 \\ 6^{v} \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 5^{v} \\ 4^{v} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} (A \otimes \ \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \ )\boldsymbol{v}$
	5	$\begin{bmatrix} 10^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7^{v} \\ 10^{v} \\ \varepsilon \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix} (A \otimes \ \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \ )\boldsymbol{v}$
3	3	$\begin{bmatrix} 8^{v} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7^{v} \\ \varepsilon \\ 6^{v} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ \varepsilon \end{bmatrix} (A \otimes \ \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \ )\boldsymbol{v}$
	1	$\begin{bmatrix} 7 \\ 6^{v} \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ \varepsilon \\ 4^{v} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} (A \otimes \ \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \ )\boldsymbol{v}$
	5	$\begin{bmatrix} 10^{v} \\ \varepsilon \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7^{v} \\ 10^{v} \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix} (A \otimes \ \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \ )\boldsymbol{v}$
4	3	$\begin{bmatrix} 8^{v} \\ \varepsilon \\ 7^{v} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 6^{v} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$
	1	$\begin{bmatrix} 7 \\ 6^{v} \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 4^{v} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ 7 \end{bmatrix}$

Berdasarkan Tabel 4.1 dapat dilihat bahwa setiap nilai eigen memiliki *weak generalized supertropical eigenvector* dan vektor eigen *supertropical* yang bersesuaian. Selain itu, terdapat beberapa vektor eigen *supertropical* (*tangible*) yang memenuhi persamaan $A \otimes \boldsymbol{v} \not\models_{gs} \lambda \otimes \boldsymbol{v}$ akan tetapi tepat dipenuhi $A \otimes \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \boldsymbol{v}$ yaitu vektor eigen *supertropical* dengan nilai vektor $\boldsymbol{u}$ yang selalu memenuhi adalah $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$, dan selainnya adalah suatu vektor eigen *supertropical* yang memenuhi $A \otimes \boldsymbol{v} \models_{gs} \lambda \otimes \boldsymbol{v}$ dimana $A \otimes \boldsymbol{v} \gneqq_{\nu} \lambda \otimes \boldsymbol{v}$ dengan beberapa vektor $\boldsymbol{u} \in \mathcal{G}_0$ yang memenuhi. Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan, untuk setiap nilai eigen yang memenuhi $A \otimes \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$ pasti memenuhi $A \otimes \boldsymbol{v} \oplus \lambda \otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0^{(n)}$ atau dapat disimpulkan bahwa setiap nilai eigen *supertropical* adalah *weak generalized supertropical eigenvalue*.

4.2 Perbandingan Perilaku Nilai Eigen dan Vektor Eigen pada Aljabar *Tropical* dengan Aljabar *Supertropical*

Pada aljabar *tropical*, dalam hal ini aljabar maxplus, pengertian nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian dari matriks persegi juga dijumpai seperti halnya pada aljabar linier. Misalkan A adalah matriks persegi berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{R}_{max}$, jika diberikan persamaan

$$A \otimes \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \boldsymbol{v},$$

dimana $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n}$ dan $\lambda \in \mathbb{R}$ secara berturut-turut disebut sebagai vektor eigen dan nilai eigen dari matriks A dimana vektor $\boldsymbol{v} \neq \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ yaitu bukan vektor nol [10].

Nilai eigen dan vektor eigen dari mariks persegi atas $\mathbb{R}_{max}$ berkaitan dengan representasi matriks tak tereduksi dan tereduksi pada graf. Matriks tak tereduksi adalah matriks yang tidak dapat dikonstruksi menjadi bentuk matriks segitiga atas dan memiliki representasi *graf strongly connected*, sedangkan matriks tereduksi adalah matriks yang dapat dikonstruksi menjadi bentuk matriks blok segitiga atas dan memiliki representasi graf tidak *strongly connected* [10]. Pada aljabar maxplus digunakan teorema berikut untuk menentukan vektor eigen $\boldsymbol{v}$ yang bersesuaian dengan nilai eigen λ dari matriks persegi $A \in M_n(\mathbb{R}_{max})$.

Teorema 4.2.1 [10]

Jika graf komunikasi $G(A)$ dari matriks $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}{}^{n\times n}$ memiliki sirkuit rata-rata maksimum berhingga λ, maka skalar λ adalah suatu nilai eigen dari A, dan kolom $[A_\lambda^*]_{\bullet,\eta}$ adalah suatu vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ, untuk setiap titik $\eta \in \mathcal{N}^c(A)$.

Pada **Teorema 4.2.1** kolom $[A_\lambda^*]_{\bullet,\eta}$ yang dimaksud adalah kolom ke-η dari matriks A_λ^*, dan $\mathcal{N}^c(A)$ adalah himpunan semua titik di graf $G^c(A)$. Berikut diberikan contoh untuk mencari nilai eigen dan vektor eigen yang besesuaian dari matriks persegi atas $\mathbb{R}_{max}$.

Contoh 4.2.1

Diberikan semiring $\mathbb{R}_{max}$ dan matriks atas semiring $\mathbb{R}_{max}$ yaitu $A \in M_2(\mathbb{R}_{max})$ dengan matriks A diberikan oleh

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen dari matriks A diperoleh dari menghitung sirkuit rata-rata maksimum

$$\lambda(A) = \bigoplus_{k=1}^{n} \frac{tr(A^{\otimes k})}{k} = \bigoplus_{k=1}^{2} \frac{tr(A^{\otimes k})}{k}$$

$$= \frac{tr(A^{\otimes 1})}{1} \oplus \frac{tr(A^{\otimes 2})}{2}$$

$$= \frac{4}{1} \oplus \frac{8}{2} = 4 \oplus 4 = 4,$$

dengan demikian diperoleh lintasan kritis yaitu dari titik $1 - 1$. Untuk menentukan vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen $\lambda = 4$ maka dilakukan dengan cara berikut, pertama ditentukan nilai A_λ yaitu

$$A_\lambda = \lambda^{\otimes -1} \otimes A = -4 \otimes \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix},$$

selanjutnya dicari nilai maksimum dari $A_\lambda^{\otimes k}$ dengan $k = 1,,n$ dan A_λ^* yaitu

$$A_\lambda^+ = \bigoplus_{k=1}^{n} A_\lambda^{\otimes k} = \bigoplus_{k=1}^{2} A_\lambda^{\otimes k}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A_\lambda^* = E \oplus A_\lambda^+ = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan perhitungan yang diperoleh, maka kolom ke-1 dari matriks A_λ^* adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 4$, hal ini dapat diperiksa sebagai berikut,

$$A \otimes \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 4 \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \lambda \otimes \boldsymbol{v}.$$

Dengan demikian nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda = 4$ dan vektor eigen yang bersesuaian adalah $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$.

□

Matriks yang diberikan pada **Contoh 4.2.1** adalah matriks *tangible* atas semiring *supertropical* seperti pada **Contoh 4.1.1**. Pada **Contoh 4.1.1** dapat dilihat bahwa matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ memiliki dua nilai eigen yaitu $\lambda_1 = 4$ dengan vektor eigen yang bersesuaian adalah $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4^{\nu} \end{bmatrix}$ dan $\lambda_2 = 1$ dengan vektor eigen yang bersesuaian adalah $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 1^{\nu} \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$. Berdasarkan **Contoh 4.2.1** dapat dilihat bahwa vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen $\lambda = 4$ adalah $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$, dengan demikian vektor eigen yang diperoleh pada perhitungan dengan operasi *ghost surpasses* memberikan hasil vektor eigen yang sama pada $\mathbb{R}_{max}$ untuk nilai eigen yang bersesuaian. Hal ini dapat dilihat bahwa vektor eigen *tangible* yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1 = 4$ adalah $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ dimana $\boldsymbol{v_1} = -4 \otimes \boldsymbol{v} = -4 \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$, sehingga $\boldsymbol{v_1}$ juga vektor eigen untuk matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}_{max})$. Sedangkan *weak generalized supertropical eigenvector* yang diperoleh pada **Contoh 4.1.1** bukan vektor eigen untuk matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}_{max})$ hal ini dapat ditunjukkan dengan menyelidiki persamaan $A \otimes \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \boldsymbol{v}$ Apabila untuk setiap *weak generalized supertropical eigenvector* yang diperoleh diselidiki pada aljabar maxplus dengan setiap elemen dari $\boldsymbol{v_1}$ dan $\boldsymbol{v_2}$ adalah elemen *tangible* maka untuk $\lambda_1 = 4$

$$A \otimes \boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_1}$$

$$A \otimes \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = 4 \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \lambda_1 \otimes \boldsymbol{v_2}$$

dan untuk $\lambda_2 = 1$

$$A \otimes \boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_2 \otimes \boldsymbol{v_1}$$

$$A \otimes \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \lambda_2 \otimes \boldsymbol{v_2}.$$

Didapatkan bahwa $\boldsymbol{v_1'} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ merupakan vektor eigen untuk $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}_{max})$ dan $\lambda_2 = 1$ bukan suatu nilai eigen untuk $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}_{max})$.

Contoh 4.2.2

Diberikan semiring $\mathbb{R}_{max}$ dan matriks atas semiring $\mathbb{R}_{max}$ yaitu $A \in M_3(\mathbb{R}_{max})$ dengan matriks A diberikan oleh

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen dari matriks A diperoleh dari menghitung sirkuit rata-rata maksimum

$$\lambda(A) = \bigoplus_{k=1}^{n} \frac{tr(A^{\otimes k})}{k} = \bigoplus_{k=1}^{3} \frac{tr(A^{\otimes k})}{k}$$

$$= \frac{tr(A^{\otimes 1})}{1} \oplus \frac{tr\left(A^{\otimes 2}\right)}{2} \oplus \frac{tr(A^{\otimes 3})}{3}$$

$$= \frac{2}{1} \oplus \frac{4}{2} \oplus \frac{6}{3} = 2 \oplus 2 \oplus 2 = 2,$$

dengan demikian diperoleh lintasan kritis yaitu dari titik $1-2-2-1$dan $3-3$. Untuk menentukan vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen $\lambda = 2$ maka dilakukan dengan cara berikut, pertama ditentukan nilai A_λ yaitu

$$A_\lambda = \lambda^{\otimes -1} \otimes A = -2 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

selanjutnya dicari nilai maksimum dari $A_\lambda^{\otimes k}$dengan $k = 1,,n$ dan A_λ^* yaitu

$$A_\lambda^+ = \bigoplus_{k=1}^{n} A_\lambda^{\otimes k} = \bigoplus_{k=1}^{3} A_\lambda^{\otimes k}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_\lambda^* = E \oplus A_\lambda^+ = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan perhitungan yang diperoleh, maka kolom ke-1, ke-2 dan ke-3 dari matriks A_λ^* adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 2$, hal ini dapat diperiksa sebagai berikut,

$$A \otimes \boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \otimes \boldsymbol{v_1},$$

$$A \otimes \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \otimes \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \otimes \boldsymbol{v_2},$$

$$A \otimes \boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \otimes \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \otimes \boldsymbol{v_3}.$$

Dengan demikian nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda = 2$ dan vektor eigen yang bersesuaian adalah $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, dan $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

□

Jika diperhatikan matriks A pada **Contoh 4.2.2** adalah matriks *tangible* atas semiring $\mathcal{R}$ seperti matriks pada **Contoh 4.1.2** yang memiliki vektor eigen yaitu $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 4^v \\ 5^v \\ 5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 3^v \\ 4^v \\ 4 \end{bmatrix}$, dan $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4^v \end{bmatrix}$. Apabila vektor-vektor tersebut diselidiki pada aljabar maxplus dengan setiap elemen pada vektor $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2},$ dan $\boldsymbol{v_3}$ adalah elemen *tangible* yaitu $\boldsymbol{v_1'} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v_2'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$, dan $\boldsymbol{v_3'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ diperoleh hasil sebagai berikut

$$A \otimes \boldsymbol{v_1'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} = 2 \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \lambda \otimes \boldsymbol{v_1'}$$

$$A \otimes \boldsymbol{v_2'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 2 \otimes \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \lambda \otimes \boldsymbol{v_2'}$$

$$A \otimes \boldsymbol{v_3'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 2 \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \lambda \otimes \boldsymbol{v_3'}$$

dalam kasus ini, vektor eigen pada aljabar *supertropical* dengan setiap elemennya diubah dalam elemen *tangible* maka didapatkan suatu vektor eigen untuk semiring $\mathbb{R}_{max}$.

Dengan cara yang sama, ditinjau matriks A pada **Contoh 4.1.3** yang menghasilkan vektor eigen seperti yang diberikan pada Tabel 4.1 Kasus 1, selanjutnya diselidiki apakah vektor eigen tersebut merupakan suatu vektor eigen pada aljabar *tropical* sebagai berikut,

1. untuk $\lambda = 5$

$$A \otimes \boldsymbol{v_1'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 10 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 15 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 5 \otimes \begin{bmatrix} 10 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \lambda \otimes \boldsymbol{v_1'}$$

$$A \otimes \boldsymbol{v_2'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 12 \\ 15 \\ 14 \end{bmatrix} = 5 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix} = \lambda \otimes \boldsymbol{v_2'}$$

$$A \otimes \boldsymbol{v_3'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix} = 5 \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix} = \lambda \otimes \boldsymbol{v_3'}$$

2. untuk $\lambda = 3$

$$A \otimes v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 11 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 3 \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \lambda \otimes v_1$$

$$A \otimes v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 10 \end{bmatrix} = 3 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \lambda \otimes v_2$$

$$A \otimes v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 11 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 9 \end{bmatrix} = 3 \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 6 \end{bmatrix} = \lambda \otimes v_3$$

3. untuk $\lambda = 1$

$$A \otimes v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \lambda \otimes v_1$$

$$A \otimes v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \lambda \otimes v_2$$

$$A \otimes v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 9 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 4 \end{bmatrix} = \lambda \otimes v_3,$$

dengan demikian $\lambda = 5$ dan $\lambda = 1$ adalah nilai eigen untuk $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R}_{max})$.

Selanjutnya diperiksa untuk matriks C pada **Contoh 4.1.4** yang menghasilkan vektor eigen seperti yang diberikan pada Tabel 4.1 Kasus 2, selanjutnya diselidiki apakah vektor eigen tersebut merupakan vektor eigen pada aljabar *tropical* yaitu,

1. untuk $\lambda = 5$

$$A \otimes v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 10 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 15 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 5 \otimes \begin{bmatrix} 10 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \lambda \otimes v_1$$

$$A \otimes v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 12 \\ 15 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 5 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \lambda \otimes v_2$$

$$A \otimes v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix} = 5 \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix} = \lambda \otimes v_3$$

2. untuk $\lambda = 3$

$$A \otimes \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 11 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 3 \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \lambda \otimes \mathbf{v}_1$$

$$A \otimes \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 3 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \lambda \otimes \mathbf{v}_2$$

$$A \otimes \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix} = 3 \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} = \lambda \otimes \mathbf{v}_3$$

3. untuk $\lambda = 1$

$$A \otimes \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \lambda \otimes \mathbf{v}_1$$

$$A \otimes \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \lambda \otimes \mathbf{v}_2$$

$$A \otimes \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \lambda \otimes \mathbf{v}_3,$$

dengan demikian $\lambda = 5$, $\lambda = 3$, dan $\lambda = 1$ adalah nilai eigen untuk $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R}_{max})$.

Selanjutnya diperiksa untuk matriks D pada **Contoh 4.1.5** yang menghasilkan vektor eigen seperti yang diberikan pada Tabel 4.1 Kasus 3, selanjutnya diselidiki apakah vektor eigen tersebut merupakan vektor eigen pada aljabar *tropical* yaitu,

1. untuk $\lambda = 5$

$$A \otimes \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 10 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 15 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 5 \otimes \begin{bmatrix} 10 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \lambda \otimes \mathbf{v}_1$$

$$A \otimes \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 12 \\ 15 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 5 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \lambda \otimes \mathbf{v}_2$$

$$A \otimes \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ \varepsilon \\ 15 \end{bmatrix} = 5 \otimes \begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix} = \lambda \otimes \mathbf{v}_3$$

2. untuk $\lambda = 3$

$$A \otimes v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 11 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 3 \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \lambda \otimes v_1$$

$$A \otimes v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 3 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \lambda \otimes v_2$$

$$A \otimes v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ \varepsilon \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ \varepsilon \\ 11 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 10 \\ \varepsilon \\ 9 \end{bmatrix} = 3 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ \varepsilon \\ 6 \end{bmatrix} = \lambda \otimes v_3$$

3. untuk $\lambda = 1$

$$A \otimes v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \lambda \otimes v_1$$

$$A \otimes v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \lambda \otimes v_2$$

$$A \otimes v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ \varepsilon \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ 9 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ \varepsilon \\ 4 \end{bmatrix} = \lambda \otimes v_3,$$

dengan demikian $\lambda = 5$, $\lambda = 3$, dan $\lambda = 1$ adalah nilai eigen untuk $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R}_{max})$.

Selanjutnya diperiksa untuk matriks E pada **Contoh 4.1.6** yang menghasilkan vektor eigen seperti yang diberikan pada Tabel 4.1 Kasus 4, selanjutnya diselidiki apakah vektor eigen tersebut merupakan vektor eigen pada aljabar *tropical* yaitu,

1. untuk $\lambda = 5$

$$A \otimes v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 10 \\ \varepsilon \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ \varepsilon \\ 14 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 15 \\ \varepsilon \\ 14 \end{bmatrix} = 5 \otimes \begin{bmatrix} 10 \\ \varepsilon \\ 9 \end{bmatrix} = \lambda \otimes v_1$$

$$A \otimes v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ 11 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 12 \\ 15 \\ 11 \end{bmatrix} = 5 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix} = \lambda \otimes v_2$$

$$A \otimes v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 15 \end{bmatrix} = 5 \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix} = \lambda \otimes v_3$$

2. untuk $\lambda = 3$

$$A \otimes \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ 12 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 11 \\ \varepsilon \\ 10 \end{bmatrix} = 3 \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ 7 \end{bmatrix} = \lambda \otimes \boldsymbol{v}_1$$

$$A \otimes \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 9 \end{bmatrix} = 3 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \lambda \otimes \boldsymbol{v}_2$$

$$A \otimes \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 11 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 9 \end{bmatrix} = 3 \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 6 \end{bmatrix} = \lambda \otimes \boldsymbol{v}_3$$

3. untuk $\lambda = 1$

$$A \otimes \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ 12 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 9 \\ \varepsilon \\ 8 \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ 7 \end{bmatrix} = \lambda \otimes \boldsymbol{v}_1$$

$$A \otimes \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \lambda \otimes \boldsymbol{v}_2$$

$$A \otimes \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 9 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 4 \end{bmatrix} = \lambda \otimes \boldsymbol{v}_3,$$

dengan demikian $\lambda = 5$ adalah nilai eigen untuk $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R}_{max})$.

Berdasarkan perbandingan yang telah dilakukan maka nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian dari matriks persegi atas aljabar *tropical* dengan aljabar *supertropical* memberikan perilaku yang sama, dimana jika pada aljabar *tropical* didapatkan suatu nilai eigen λ dengan vektor eigen yang bersesuaian yaitu $\boldsymbol{v}$ maka pada aljabar *supertropical* juga diperoleh nilai eigen yang sama.

BAB 5

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Nilai eigen $\lambda \in \mathbb{R}$ dari matriks persegi atas semiring *supertropical* dapat bernilai tunggal maupun tidak tunggal dan terbagi menjadi dua nilai eigen yaitu *weak generalized supertropical eigenvalue* dan nilai eigen *supertropical*, sedangkan vektor eigen $\boldsymbol{v}$ yang bersesuaian dengan nilai eigen λ memiliki nilai yang tidak tunggal. Vektor eigen $\boldsymbol{v}$ yang memenuhi persamaan $A \otimes \boldsymbol{v} \vDash_{gs} \lambda \otimes \boldsymbol{v}$ dan tepat dipenuhi $A \otimes \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \boldsymbol{v}$ merupakan vektor eigen *supertropical* dengan nilai vektor $\boldsymbol{u} \in \mathcal{G}_0{}^{(n)}$ yang selalu memenuhi adalah $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$, dan untuk setiap nilai eigen yang memenuhi $A \otimes \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$ maka pasti memenuhi $A \otimes \boldsymbol{v} \oplus \lambda \otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}_0{}^{(n)}$.
2. Perbandingan nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian pada aljabar maxplus dengan semiring *supertropical* menunjukkan bahwa jika pada aljabar *tropical* didapatkan suatu nilai eigen λ dengan vektor eigen yang bersesuaian yaitu $\boldsymbol{v}$ maka pada aljabar *supertropical* juga diperoleh nilai eigen yang sama. Dengan demikian keduanya menunjukkan perilaku yang sama.

5.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan maka saran untuk penelitian selanjutnya adalah dapat dibahas kajian mengenai perilaku nilai eigen dan vektor eigen pada aljabar *supertropical* yang terkait dengan representasi graf dari matriks persegi atas semiring *supertropical*. Selain itu juga dapat dilakukan karakterisasi penyelesaian polinomial pada aljabar *tropical* dan aljabar *supertropical*.

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR PUSTAKA

[1] Golan, Jonathan S, (1999), *Semirings and Their Applications*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

[2] Izhakian, Z., (2008), "Tropical Arithmetic and Tropical Matrix Algebra", *Arxiv*, No. 0505458v3, hal. 1-17.

[3] Izhakian, Z. dan Rowen, L., (2010), "Supertropical Algebra", *Advances in Mathematics,* Vol. 225, hal. 2222-2286.

[4] Izhakian, Z. dan Rowen, L., (2011a), "Supertropical Matrix Algebra", *Israel Journal of Mathematics,* Vol. 182, No. 10.1007/s11856-011-0036-2, hal. 383-424.

[5] Izhakian, Z. dan Rowen, L., (2011b), "Supertropical Matrix Algebra II : Solving Tropical Equations", *Israel Journal of Mathematics*, Vol. 186, No. 10.1007/s11856-011-0133-2, hal. 69-96.

[6] Izhakian, Z.,dan Rowen, L.,(2011c), "Supertropical Matrix Algebra III : Power of Matrices and Their Supertropical Eigenvalues", *Journal of Algebra*, Vol. 341, No. 10.1016/j.jalgebra.2011.06.002, hal. 125-149.

[7] Litvinov, G. L., (2012), "Dequantization of Mathematical Structures and Tropical/ Idempotent Mathematics. An Introductory Lecture", *International Workshop Tropical and Idempotent Mathematics,* Eds: G. L. Litvinov, V. P. Maslov, A. G. Kushber, S. N. Sergeev, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, hal. 5-21.

[8] Niv, Adi, (2015), "On Pseudo-Inverses of Matrices and Their Characteristic Polynomials in Supertropical Algebra", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 471, hal. 264-290.

[9] Maclagan, D. dan Sturmfels, B., (2015), *Introduction to Tropical Geometry*, American Mathematical Society, United States of America.

[10] Subiono, (2015), *Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya*, Bahan Kuliah: Aljabar Min Max Plus, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

[11] Izhakian, Z., Knebusch, M., Rowen, L., (2011), "A Glimpse at Supertropical Valuation Theory", Journal of Universitas Ovidius Constanta. Vol 19(2), hal 1-12.

BIODATA PENULIS

Penulis yang memiliki nama lengkap Aprilia Divi Yustita lahir di Banyuwangi, 25 April 1992. Penulis telah menempuh pendidikan formal mulai dari SD Negeri 1 Kesilir, SMP Negeri 1 Siliragung, dan SMA Negeri 2 Genteng. Setelah lulus dari SMA, penulis melanjutkan S1 di Jurusan Matematika Universitas Brawijaya Malang dan diterima sebagai mahasiswa angkatan 2010. Selama kuliah S1 di Jurusan Matematika penulis mengambil Bidang Minat Aljabar. Penulis lulus sarjana tujuh semester dengan mendapat gelar Sarjana Sains. Penulis melanjutkan studi S2 di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya pada tahun 2014 dan mengambil Bidang Minat Analisis dan Aljabar. Untuk membentuk jaringan atau membutuhkan informasi yang berhubungan dengan tesis ini, penulis dapat dihubungi melalui email ADYustita@gmail.com.